Libros de Cátedra

Matemáticas especiales para Fisicoquímicos

José Luis Vicente, Matías Rafti y Alberto Gustavo Albesa

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS

e
exactas





MATEMÁTICAS ESPECIALES
PARA FISICOQUÍMICOS

José Luis Vicente
Matías Rafti
Alberto Gustavo Albesa

Facultad de Ciencias Exactas





Agradecimientos

Agradecemos en primer lugar a nuestros familiares, que nos acompañaron durante toda la tarea de escritura; a nuestros profesores, que nos pusieron en contacto con los temas desarrollados; a las autoridades, colegas y personal del Instituto de Investigaciones Fisicoquímicas Teóricas y Aplicadas (INIFTA), donde desarrollamos gran parte de la labor aquí presentada; a las autoridades, colegas y personal de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), que colaboraron de distintas formas en la escritura del libro; y a las autoridades de la UNLP, que permiten la cristalización de esta obra.

Índice

Introducción

Uno de los principales motivos que nos llevó a la redacción del presente libro de cátedra se ha debido en parte a los distintos cambios en los planes de estudio y las modificaciones en los contenidos de las cursos correlativos, dado que esto ha hecho prácticamente imposible encontrar en la literatura, a pesar de la gran variedad disponible, algún texto que pudiera cubrir el programa de la asignatura Matemáticas Especiales para Químicos, y cumplir con sus objetivos e inserción en la carrera de Licenciatura en Química. En líneas generales, el curso comprende una introducción al estudio de la variable compleja, y un desarrollo de las ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y en derivadas parciales. Los sucesivos cambios de planes de estudio han llevado a que las asignaturas previas de matemáticas, dictadas en los dos primeros cuatrimestres, quedaran muy distanciadas en el tiempo respecto al presente curso que corresponde al octavo cuatrimestre. Es decir que tropezamos con la dificultad debida a la poca asiduidad con que pueden haberse empleado las herramientas matemáticas adquiridas durante el primer año, y que en este curso deben usarse en forma corriente. Por otro parte, durante ese lapso de tiempo, los estudiantes asisten a cursos de física y química donde emplean resultados matemáticos, con muy escasa o ninguna explicación, de manera que otro de nuestros propósitos fue que esos mismos resultados cobraran un nuevo valor al poder insertarse en forma coherente a través de una nueva presentación.

CAPÍTULO 1

Números complejos

Alberto Gustavo Albesa

Barrio plateado por la luna,
Rumores de milonga
Es toda tu fortuna.
Hay un fuelle que rezonga
En la cortada mistonga.
Mientras que una pebeta
Linda como una flor,
espera coqueta
bajo la quieta luz de un farol.

C. Gardel, A. Le Pera, M. Battistella; MELODÍA DE ARRABAL.

Los números complejos se introducen en conexión con la resolución de ciertas ecuaciones algebraicas. La imposibilidad de resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en el campo de los números reales, condujo a la introducción de un "número" convencional i definido por la ecuación $i^2 = -1$, llamado unidad imaginaria.

Los números de la forma $z = x + i\,y$, donde x e y son números reales, se denominan números complejos.

x e y son respectivamente la parte real e imaginaria del número complejo z, y se escribe $x = Re\{z\}$, $y = Im\{z\}$

Si $x = 0$ se dice que el número z es imaginario puro, y si $y = 0$ es real.

Dos números complejos $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$ son iguales si y solo si son iguales sus partes reales e imaginarias, es decir $x_2 = x_1$ e $y_2 = y_1$.

1.1 Propiedades algebraicas

Si $z_1 = x_1 + i\, y_1,\ z_2 = x_2 + i\, y_2$ entonces

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2),$$

se suman y multiplican como binomios reales utilizando el hecho que $i^2 = -1$, o sea

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Si $z_1 = x_1$ queda, $\quad x_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + i\; x_1 y_2.$

Definiendo la división como la operación inversa de la multiplicación, queda unívocamente determinada, con la condición que el denominador sea distinto de cero. Vemos que $i^{-1} = -i$.

Además los números complejos obedecen las propiedades asociativas y conmutativas usuales para la suma y el producto, así como la ley distributiva

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

1.2 Representación geométrica

Todo número complejo $z = x + i\, y$, se puede representar en un plano coordenado mediante un punto de coordenadas (x, y), o por un vector dirigido desde el origen al punto (x, y).

Esto conduce a un nuevo punto de vista respecto a los números complejos: son pares de números reales (x, y) que se suman y restan siguiendo las mismas leyes de las cantidades vectoriales encontradas en Física: fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc. Esto hace pensar que los números complejos no son meras generalizaciones, sino que pueden ser utilizados para representar magnitudes aplicadas al mundo real. Ver Polya (1991).

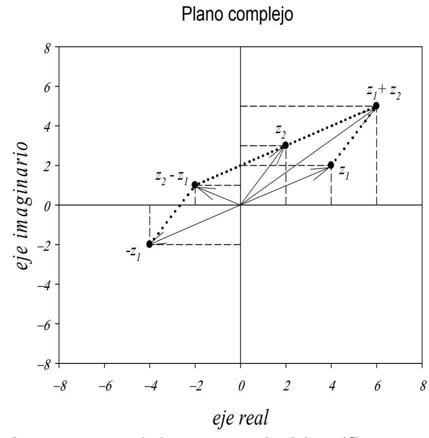


***Figura 1.1** Cada número complejo se puede identificar con un punto o un vector*

Sin embargo, los primeros éxitos en el uso de los números complejos fueron en álgebra donde se demostró que toda ecuación algebraica de la forma $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$, con a_n números complejos conocidos, tiene exactamente n soluciones (raíces) complejas, resultado que se conoce como teorema fundamental del álgebra.

Volviendo a la representación geométrica, al eje horizontal se lo llama eje real y al vertical eje imaginario, y al plano, plano complejo.

La transformación que sustituye $x + i\,y$ por $x - i\,y$ se llama conjugación compleja, y a $z^* = x - i\,y$ se lo llama conjugado de $z = x + i\,y$. Un número complejo es real si y solo si es igual a su conjugado.

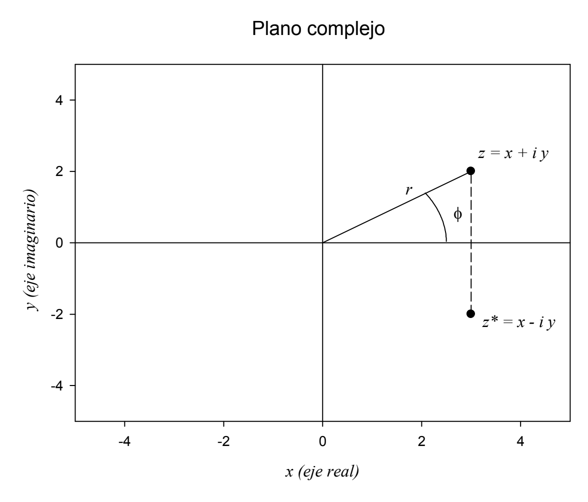


Figura 1.2 *Cada número complejo se representar forma cartesiana o polar*

La conjugación es una operación involutiva, es decir $z^{**} = z$. z^* es simétrico a z respecto al eje real. Además

$$x = \tfrac{1}{2}\,(z + z^*), \qquad y = \tfrac{1}{2i}\,(z - z^*) = \tfrac{i}{2}\,(z^* - z)$$

y

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*, \qquad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

Como $z \cdot z^* = x^2 + y^2 \geq 0$, su raíz cuadrada positiva se la llama módulo de z, se denota

$$|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(z \cdot z^*)}$$

representa la longitud del vector z, como $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i\,(y_2 - y_1)$, resulta que $|z_2 - z_1|$ es la distancia de z_1 a z_2, $|z^*| = |z|$. Si $z_2 \neq 0$, el cociente se puede escribir como $z_1 / z_2 = z_1 z_2^* / |z_2|^2$, o sea

$$z_1 / z_2 = [(x_1 x_2 + y_1 y_2)] / (x_2^2 + y_2^2) + i\,[(x_2 y_1 - x_1 y_2)] / (x_2^2 + y_2^2)$$

Recordando que de los números reales que $|x| = +\sqrt{(x^2)}$, $-|x| \leq x \leq +|x|$, resulta entonces $-|z| \leq Re\{z\} \leq |z|$, y $-|z| \leq Im\{z\} \leq |z|$.

Además

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 \pm z_2| \geq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$$

1.3 Forma trigonométrica

Cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$ se puede expresar en coordenadas polares (r, ϕ) como

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,sen\,\phi \end{cases}$$

de manera que cada número complejo z se puede escribir en forma trigonométrica como

$$z = x + i\, y = r\,(cos\ \phi + i\ sen\ \phi)$$

r es la longitud del vector z es decir $r = |z|$ es el módulo de z.

Si $r \neq 0$ resulta

$$\begin{cases} cos\ \phi = x/r \\ sen\ \phi = y/r \end{cases}$$

se puede obtener ϕ, y si $x \neq 0$ se puede usar $tg\ \phi = y/x$

Recordando que

$$\begin{cases} sen\,(\phi_1 \pm \phi_2) = sen\phi_1\ \ cos\phi_2\ \ \pm cos\phi_1\ \ sen\phi_2 \\ cos\,(\phi_1 \pm \phi_2) = cos\phi_1\ \ cos\phi_2\ \ \mp\ sen\phi_1\ \ sen\phi_2 \end{cases}$$

Se ve que si $z_1 = r_1\,(cos\ \phi_1 + i\ sen\ \phi_1)$ y $z_2 = r_2\,(cos\ \phi_2 + i\ sen\ \phi_2)$, resulta

$$z_1 \cdot\ z_2 = r_1\, r_2\,[cos\ (\phi_1 +\ \phi_2) + i\ sen\ (\phi_1 +\ \phi_2)]$$

y si $z_2 \neq 0$

$$z_1\, /\, z_2 = z_1\, z_2{}^*/\ |z_2|^2 = (r_1\, /r_2)\ [cos\ (\phi_1 - \phi_2) + i\ sen\ (\phi_1 - \phi_2)]$$

Definición de argumento de $z \neq 0$. Si ϕ es un número real se define $e^{i\phi} = cos\ \phi + i\ sen\ \phi$, entonces se cumple que:

1) $|e^{i\phi}| = 1$, por lo tanto $e^{i\phi} \neq 0$

2) $e^{i\phi}\ = 1\ \ \therefore$

$$\begin{cases} cos\ \phi = 1 \\ sen\ \phi = 0\ \ \therefore\ \ \phi = k\ 2\,\pi, k = 0, \pm\, 1, \pm\, 2, \ldots \end{cases}$$

3) $e^{i(\phi 1+\phi 2)}\ = e^{i\ \phi 1}\ \ e^{i\ \phi 2}$

$e^{i(\phi 1-\phi 2)}\ = e^{i\ \phi 1}\,/\, e^{i\ \phi 2}$

Por lo tanto si $e^{i\ \phi 2}\ = e^{i\ \phi 1}\ \ \therefore\ \ e^{i\ \phi 2}\,/\, e^{i\ \phi 1}\ = e^{i(\phi 2-\phi 1)} = 1\ \ \therefore\ \ \phi_2 =\ \phi_1 + k\ 2\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Se define el argumento de $z \neq 0$ a cualquier solución de $e^{i\phi} = z\, /\,|z|$, y se escribe $\phi = arg(z)$

Se puede ver que

$$arg(z_1\, z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) + k\ 2\pi$$

$$arg(z_1/z_2) = arg(z_1) - arg(z_2) + k\ 2\pi$$

Para cualquier intervalo de longitud 2π existe exactamente un valor de $arg(z)$

Se llama valor principal de $arg(z)$ a aquel que cae entre $-\pi$ y π, y se lo denota como $Arg(z)$, es decir $-\pi < Arg(z) \leq\ \pi$

Cuando z atraviesa el eje real negativo, de abajo hacia arriba, $Arg(z)$ salta de $-\pi$ a π.

Ver por ejemplo: Churchill (1992), Markushevich (1970), y Zill (2011).

Un número complejo $z \neq 0$ se puede escribir como $z = r\, e^{i\phi}$ donde $r = |z|$ y $\phi = arg(z)$

1.4 Potencias y raíces

A partir de $z = r\,(cos\ \phi + i\ sen\ \phi)$ resulta

$$w = z^n =\ r^n\,(cos\ n\phi + i\ sen\ n\phi),$$

para $r = 1$ queda la relación $(\cos\phi + i\ sen\ \phi)^n = \cos n\phi + i\ sen\ n\phi$.

Si se escribe en forma exponencial $z = r\,e^{i\phi}$ y a su vez $w = \rho\,e^{i\,\theta}$, resulta $\rho\,e^{i\,\theta} = r^n\,e^{in\phi}$ $\therefore$

$$\begin{cases}\rho = r^n \\ \theta = n\,\phi + k\,2\,\pi\end{cases}$$

cualquier valor de k da el mismo número complejo, por lo tanto se puede tomar $k = 0$

$$\begin{cases}\rho = r^n \\ \theta = n\,\phi\end{cases}$$

Raíces n-ésimas de un número complejo $z = r\,(\cos\phi + i\ sen\ \phi) = r\,e^{i\phi} \neq 0,\ w = \rho\,e^{i\,\theta}$, tal que $w^n = z$

$$\begin{cases}\rho^n = r \\ \phi = n\,\theta + k\,2\,\pi\end{cases} \qquad \begin{cases}\rho = r^{1/n} \\ \theta = \phi\,/\,n + (k/\,n)\,2\,\pi,\ k = 0, 1, ..., n - 1\end{cases}$$

Hay n raíces distintas sobre la circunferencia con centro en 0 y radio $r^{1/n}$

Para $z = 1$, se tiene $r = 1,\ \phi = 0$ y entonces

$$\begin{cases}\rho = 1 \\ \theta = (k/\,n)\,2\,\pi,\ k = 0, 1, ..., n - 1\end{cases}$$

Las raíces de la unidad son por lo tanto:

$$\omega_k = \cos k\,2\pi/n + i\ sen\ k\,2\pi/n = (\cos 2\pi/n + i\ sen\ 2\pi/n)^k \text{ con } k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1$$

o sea $\omega_k = \zeta^k$ con $\zeta = \cos 2\pi/n + i\ sen\ 2\pi/n$

Ejemplo: Calcular las raíces sextas de la unidad y representarlas geométricamente en el plano complejo.

Corresponde a $n = 6$, y queda entonces $\omega_k = \cos k\,\pi/3 + i\ sen\ k\,\pi/3 = (\cos\pi/3 + i\ sen\ \pi/3)^k$, con $k = 0,\ 1,\ ...,\ 5$, es decir:

$\omega_0 = \cos 0 + i\ sen\ 0 = 1, \omega_1 = \cos\pi/3 + i\ sen\ \pi/3 = ½ + i\sqrt{3}/_2$, $\quad\omega_3 = \cos 2\pi/3 + i\ sen\ 2\pi/3 = -½ + i\sqrt{3}/_2$,

$\omega_3 = \cos\pi + i\ sen\ \pi = -1,\ \omega_4 = \cos 4\pi/3 + i\ sen\ 4\pi/3 = -½ - i\sqrt{3}/_2$, $\ \omega_5 = \cos 5\pi/3 + i\ sen\ 5\pi/3 = +½ - i\sqrt{3}/_2$,

Constituyen los vértices de un hexágono, uno de los cuales obviamente es la unidad ω_0.

Ver Spiegel (1991).

1.5 Regiones y curvas elementales en el plano complejo

Dado un número complejo z_o y un número real positivo r_o, el conjunto de puntos z tales que $|z - z_o| = r_o$, podemos identificarlos a puntos cuya distancia a z_0 es r_0, es decir forman una circunferencia con centro z_o y radio r_o, ya que si $z = x + i\,y$, $z_o = x_o + i\,y_o$ entonces $|z - z_o|^2 = r_o^2$ equivale a la expresión $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^2$.

El conjunto de puntos z tal que $|z - z_o| < r_o$ son los puntos interiores a dicha circunferencia, y se llaman entorno con centro z_o y radio r_o, y se escribe $\Delta(z_o,r_o) = \{ z\ :\ |z - z_o| < r_o\}$

Dada una región Ω del plano complejo, un punto z_o es interior a Ω si y solo si (sii) existe r_o tal que $\Delta(z_o,r_o) \cap \Omega = \Delta(z_o,r_o)$, es decir $\Delta(z_o,r_o) \subset \Omega$, y es exterior sii $\Delta(z_o,r_o) \cap \Omega = \emptyset$. Los puntos que

no son ni interiores ni exteriores se denominan puntos de la frontera de Ω, a veces los denotaremos como $\partial\Omega$.

Una región Ω es abierta si todos sus puntos son interiores.

La unión de regiones abiertas es siempre abierta, pero la intersección de infinitos abiertos puede no ser abierta. Ejemplo $\Omega_n = \{z : |z| < 1/n\}$

Una región Ω se llama conexa si no existen dos conjuntos abiertos Ω_1 y Ω_2 no vacíos tales que $\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega \cap \Omega_1 \neq \emptyset$, $\Omega \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ y $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Se llama dominio a todo conjunto abierto y conexo. Ver Ahlfors (1953).

¿Cómo pasar de la representación de curvas elementales en R^2 al plano complejo?

Ver Polya (1991), Spiegel (1991).

a) La recta:

En R^2	En el plano complejo
$B x + Cy + D = 0$, B, C, D números reales	$\lvert z - z_1 \rvert = \lvert z - z_2 \rvert$
$x = \frac{1}{2}(z^* + z)$, $\quad y = \frac{i}{2}(z^* - z)$	$\lvert z - z_1 \rvert^2 = \lvert z - z_2 \rvert^2$
$\frac{1}{2}(B - iC)\, z + \frac{1}{2}(B + iC)\, z^* + D = 0$	$(z - z_1)(z^* - z_1^*) = (z - z_2)(z^* - z_2^*)$
$a\, z + a^*\, z^* + D = 0$	$\lvert z \rvert^2 + \lvert z_1 \rvert^2 - z_1^*\, z - z_1\, z^* = \lvert z \rvert^2 + \lvert z_2 \rvert^2 - z_2^*\, z - z_2\, z^*$
	$(z_2 - z_1)^*\, z + (z_2 - z_1)\, z^* + \lvert z_1 \rvert^2 - \lvert z_2 \rvert^2 = 0$

b) La circunferencia:

En R^2	En el plano complejo
$A(x^2+y^2) + B x + Cy + D = 0, \quad \begin{cases} A = 0, & \text{recta} \\ A \neq 0, & \text{circunferencia} \end{cases}$	$z = x + i\, y, \quad z_o = x_o + i\, y_o$
$x^2 + (B/A)\, x + y^2 + (C/A)\, y + D/A = 0,$	$z - z_o = (x - x_o) + i\,(y - y_o)$
$(x - B/2A)^2 + (y - C/2A)^2 = (B^2 + C^2)]/4A^2 - D/A$	
$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^2$	$\lvert z - z_o \rvert^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$
	$\lvert z - z_o \rvert = r_o$

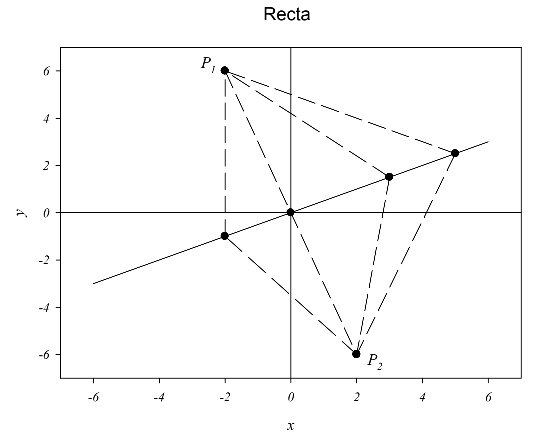


Figura 1.3 *Los puntos de una recta se pueden caracterizar como aquellos que equidistan de dos puntos fijos P_1 y P_2*

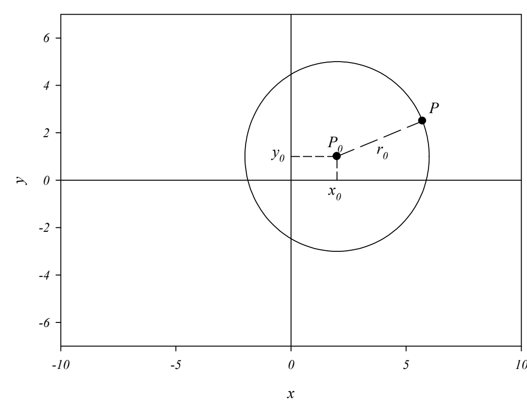


Figura 1.4 *Los puntos de una circunferencia se pueden caracterizar como aquellos que se encuentran a una misma distancia (radio) de un punto fijo P_0 (centro).*

c) La elipse

$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, \quad |z_2 - z_1| = 2c < 2a, \qquad z_1 = -c, \quad z_2 = c, \qquad z = x + i\,y$

$\sqrt{[(x + c)^2 + y^2]} + \sqrt{[(x - c)^2 + y^2]} = 2a$

$\sqrt{[(x + c)^2 + y^2]} = 2a - \sqrt{[(x - c)^2 + y^2]}$

$(x + c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 + (x - c)^2 + \cancel{y^2} - 4a\sqrt{[(x - c)^2 + y^2]}$

$a\sqrt{[(x - c)^2 + y^2]} = a^2 + c\,x$

$a^2 (x - c)^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2 x^2 a^2 + 2\,a^2\,c\,x$

$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2\,(a^2 - c^2), \qquad b^2 = (a^2 - c^2)$

$b^2\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,b^2, \qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

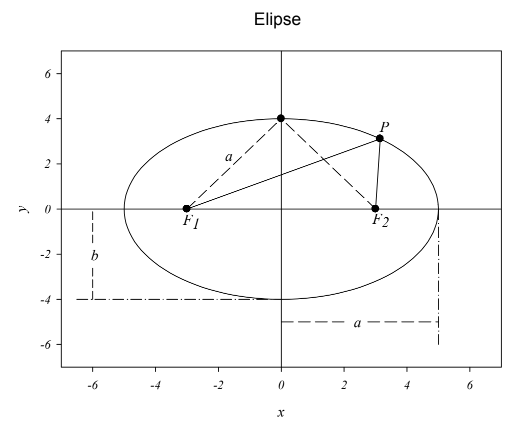


Figura 1.5 *Los puntos de una elipse son aquellos en que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es una constante que además debe ser mayor a la distancia entre F_1 y F_2.*

d) La hipérbola

$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a, \quad |z_2 - z_1| = 2c > 2a, \qquad z_1 = -c, \quad z_2 = c, \qquad z = x + i\,y$

$\sqrt{[(x + c)^2 + y^2]} - \sqrt{[(x - c)^2 + y^2]} = 2a$

$\sqrt{[(x + c)^2 + y^2]} = 2a + \sqrt{[(x - c)^2 + y^2]}$

$(x + c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 + (x - c)^2 + \cancel{y^2} + 4a\sqrt{[(x - c)^2 + y^2]}$

$c\,x - a^2 = a\sqrt{[(x - c)^2 + y^2]}$

$a^4 + c^2 x^2 - 2\,a^2\,c\,x = a^2\,(x - c)^2 + a^2y^2$

$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2\,(c^2 - a^2), \qquad b^2 = (c^2 - a^2)$

$b^2\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,b^2, \qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

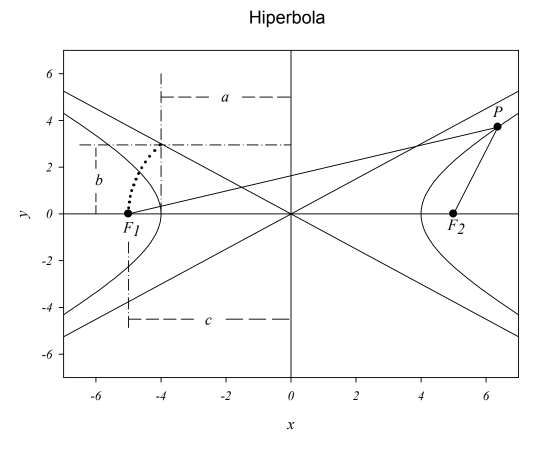


Figura 1.6 *Los puntos de una rama de una hipérbola son aquellos en que la resta de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (focos) es una constante que además debe ser menor a la distancia entre F_1 y F_2.*

Referencias

Ahlfors, L.V.(1953). Complex analysis. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Churchill, R.V. y Brown, J.W. (1992). *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid. España. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

Markushevich, A. (1970). Teoría de las funciones analíticas. Tomo I. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Polya, G. y Gordon L. (1991). *Variable compleja*. México D.F. México. Editorial Limusa, S.A.

Spiegel, M.R. (1991). *Variable compleja*. México D.F. México. McGraw-Hill/ Interamericana de México, S.A.

Zill D.G. y Shanahan P.D. (2011). *Introducción al Análisis complejo con aplicaciones*. México D.F. México. Cengage Learning Editores.

CAPÍTULO 2

Funciones de variable compleja

Alberto Gustavo Albesa

Un pedazo de barrio, allá en Pompeya,
durmiéndose al costado del terraplén
Un farol balanceando en la barrera.
y el misterio de adiós que siembra el tren
Un ladrido de perros a la luna.
El amor escondido en un portón
Y los sapos redoblando en la lagunay a los
lejos la voz del bandoneón.

A. Troilo, H.Manzi, BARRIO DE TANGO

Utilizaremos como notación para las variables reales las letras x, y, u, v, y para las variables complejas z, w, ζ, ω.

Se pueden tener distintos tipo de funciones de acuerdo al dominio y la imagen de las mismas, por ejemplo

$u = f(x) = x^2$ es una función real de variable real

$u = f(z) = |z| = |x + i\,y| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ es una función real de variable compleja

$w = f(x) = e^{i\,x}$ es una función compleja de variable real

$w = f(z) = z^2 = (x + i\,y)^2$ es una función compleja de variable compleja.

¿Cómo interpretar y representar gráficamente una función compleja de variable compleja?

$$w = f(z)$$

$$\begin{cases} z = x + i\,y \\ w = u + i\,v \end{cases} \qquad w = f(z) = f(x + i\,y) = u + i\,v = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

Dar una función compleja de variable compleja, $w = f(z)$, es equivalente a dar dos funciones reales de dos variables reales, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Ejemplo: $w = f(z) = z^2 \qquad w = (x + i\,y)^2 = x^2 - y^2 + i\,2\,x\,y \quad \therefore \quad u + i\,v = x^2 - y^2 + i\,2\,x\,y$

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2\,x\,y \end{cases}$$

Se puede representar dibujando dos planos complejos, el Z y el W, de manera que a cada punto z_o de Z le corresponde un punto $w_o = f(z_o)$ de W, y a cada curva γ de Z le corresponde una curva Γ de W.

Frecuentemente, para poder notar como la función f "traslada" cada punto en el plano complejo, se representan tanto los puntos z_o como $w_o = f(z_o)$, en el mismo plano W.
Ver Churchill (1992).

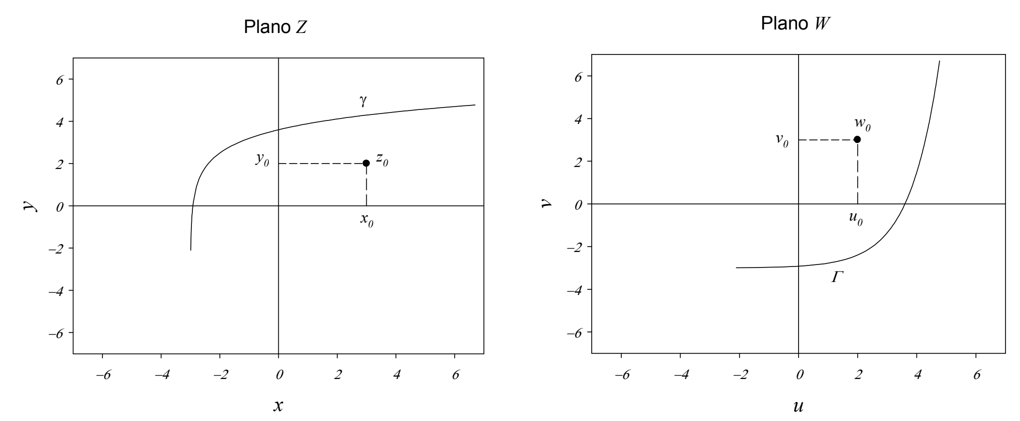


***Figura 2.1** Las funciones de variable compleja w = f(z), se pueden representar dibujando dos planos complejos. Uno representa los puntos del dominio y el otro los de la imagen, de manera que para cada punto z de un plano se le puede asociar un w del otro, y análogamente a cada curva □, la correspondiente curva □.*

Funciones simples

1) $\begin{cases} w = z + z_0 \\ z_0 = x_0 + i\, y_0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} u = x + x_0 \\ v = y + y_0 \end{cases}$

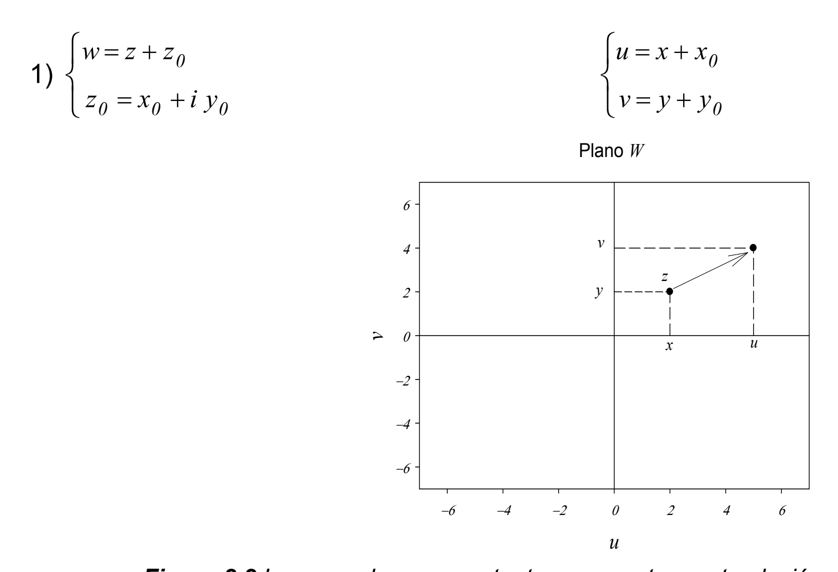


***Figura 2.2** La suma de una constante representa una traslación en el plano complejo*

Es una traslación sin deformación en la dirección del "vector" z_o

¿Cómo se transforman las rectas y circunferencias?

2) $w = z_1 z$

$$\begin{cases} z = r\,e^{i\phi} \\ z_1 = r_1\,e^{i\phi_1} \\ w = \rho\,e^{i\theta} \end{cases} \qquad \rho\,e^{i\theta} = r_1\,r\,e^{i(\phi 1+\phi)} \qquad \begin{cases} \rho = r_1\,r \\ \theta = \phi + \phi_1 \end{cases}$$

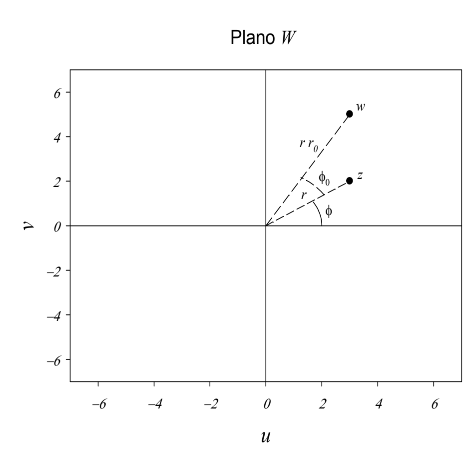


Figura 2.3 *El producto por una constante representa una dilatación mas una rotación*

Es una dilatación (o contracción) r_1 en mas una rotación en ϕ_1

¿Cómo se transforman las rectas y circunferencias?

3) $w = z^*$

$$\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$$

Es una reflexión respecto al eje real.

4) $w = 1/z, \quad z \neq 0$

$|w| = 1/|z|, \; w = z^*/|z|^2$

$$\begin{cases} z = r\,e^{i\phi} \\ w = z^* = \rho\,e^{i\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 1/r \\ \theta = -\phi \end{cases}$$

¿Cómo se transforman las rectas y circunferencias?

$A\,(x^2 + y^2) + B\,x + C\,y + D = 0 \quad \therefore \quad A|z|^2 + ½(B - i\,C)\,z + ½(B + i\,C)\,z^* + D = 0$

$A\,/|w|^2 + ½(B - i\,C)\,1/w + ½(B + i\,C)\,1/w^* + D = 0$

$A\,/|w|^2 + ½(B - i\,C)\,w^*/|w|^2 + ½(B + i\,C)\,w/|w|^2 + D = 0$

$D|w|^2 + ½(B + i\,C)\,w + ½(B - i\,C)\,w^* + A = 0 \quad \therefore \quad D\,(u^2 + v^2) + B\,u - C\,v + A = 0$

Transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

¿Cómo se transforman las rectas y circunferencias que pasan por el origen?

5) $w = a\,z + b, \quad a \neq 0$ Transformación lineal

$w = a\,(z + b/a) \quad \therefore \quad z \rightarrow z + b/a \rightarrow w = a\,(z + b/a)$

Es una traslación seguida de una dilatación y rotación. Por lo tanto transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

¿Cómo encontrar una trasformación lineal que envíe z_1 en w_1 y z_2 en w_2? ¿Cuánto deben valer a y b?

$w = a\,z + b$

$w_1 = a\, z_1 + b$ ~~b~~ $w - w_1 = a\,(z - z_1)$

$w_2 = a\, z_2 + b$ $w_2 - w_1 = a\,(z_2 - z_1)$ ~~a~~ $(w - w_1)/(w_2 - w_1) = (z - z_1)/(z_2 - z_1)$

$w = w_1 + [(w_2 - w_1)/(z_2 - z_1)]\,(z - z_1)$

6) $w = (a\,z + b)/(c\,z + d)$, $\Delta = a\,d - b\,c \neq 0$ Transformación bilineal

a) $c = 0$, $w = (a/d)\,z + (b/d)$ se reduce a una transformación lineal

b) $c \neq 0$, $w = [a(z + d/c) + (b - a\,d/c)]/[c\,(z + d/a)] = a/c + [(b\,c - a\,d)/c^2]/(z + d/a)$

$$z \to z + d/a \to 1/(z + d/a) \to [(b\,c - a\,d)/c^2]/(z + d/a) \to w$$

Por lo tanto transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

¿Cómo encontrar una trasformación bilineal que envíe z_1 en w_1, z_2 en w_2 y z_3 en w_3? ¿Cuánto deben valer a, b, c y d?

$w = (a\,z + b)/(c\,z + d)$, $w_1 = (a\,z_1 + b)/(c\,z_1 + d)$, $w_2 = (a\,z_2 + b)/(c\,z_2 + d)$, $w_3 = (a\,z_3 + b)/(c\,z_3 + d)$,

$$w - w_1 = [(a\,z + b)(c\,z_1 + d) - (a\,z_1 + b)(c\,z + d)]/[(c\,z + d)(c\,z_1 + d)] =$$

$$= [a\,d\,(z - z_1) - a\,d\,(z - z_1)]/[(c\,z + d)(c\,z_1 + d)] = \Delta\,(z - z_1)/[(c\,z + d)(c\,z_1 + d)]$$

$$w_2 - w_1 = [(a\,z_2 + b)(c\,z_1 + d) - (a\,z_1 + b)(c\,z_2 + d)]/[(c\,z_2 + d)(c\,z_1 + d)] =$$

$$= [a\,d\,(z_2 - z_1) - a\,d\,(z_2 - z_1)]/[(c\,z_2 + d)(c\,z_1 + d)] = \Delta\,(z_2 - z_1)/[(c\,z_2 + d)(c\,z_1 + d)]$$

$$(w - w_1)/(w_2 - w_1) = [(z - z_1)(c\,z_2 + d)]/[(z_2 - z_1)(c\,z + d)]$$

$$(w - w_3)/(w_2 - w_3) = [(z - z_3)(c\,z_2 + d)]/[(z_2 - z_3)(c\,z + d)]$$

$$R = [(w - w_1)\,(w_2 - w_3)]/[(w_2 - w_1)\,(w - w_3)] = [(z - z_1)\,(z_2 - z_3)]/[(z_2 - z_1)\,(z - z_3)]$$

entonces:

$$\begin{cases} z \to z_1 \ \therefore\ R \to 0 \ \therefore\ w \to w_1 \\ z \to z_2 \ \therefore\ R \to 1 \ \therefore\ w \to w_2 \\ z \to z_3 \ \therefore\ R \to \infty \ \therefore\ w \to w_3 \end{cases}$$

Ver Ahlfors (1953), Churchill (1992).

Límites

Si $z = x + i\,y$, $w = f(z) = u + i\,v$, $z_o = x_o + i\,y_o$, $w_o = u_o + i\,v_o$, entonces

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = w_o \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y) = u_o \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v(x,y) = v_o \end{cases}$$

¿Cómo se resolvían?

Ver Feyel (1980).

1º) $\lim\limits_{y \to y_o} \lim\limits_{x \to x_o} u(x,y) = L_1$ Si $L_2 \neq L_1$ no existe

$\lim\limits_{x \to x_o} \lim\limits_{y \to y_o} u(x,y) = L_2$ Si $L_2 = L_1 = L$ no se sabe, hay que seguir investigando

2º) Buscar una función $\varphi(x,y)$ tal que: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \varphi(x,y) = 0$

y además $0 \le | u(x,y) - L | \le \varphi(x,y)$ en un entorno reducido de (x_o, y_o),

entonces existe el límite y es L

Otra forma de verlo es tomando

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\phi \\ y = y_0 + r\,sen\,\phi \end{cases} \quad \text{es decir} \quad z = z_0 + r\,e^{i\phi}$$

y ver si $\lim_{r \to 0} f(z_o + r\,e^{i\phi})$ existe y depende de ϕ, porque entonces no existe el límite.

Ejemplos:

1) $$f(z) = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{x^2 - y^2 + i\,2\,x\,y}{x^2 + y^2} \quad \begin{cases} u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \;\therefore\; \lim_{x\to 0} u = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1 \;\therefore\; \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} u = -1 \\ v = \dfrac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} \;\therefore\; \lim_{y\to 0} u = \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \;\therefore\; \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} u = 1 \end{cases}$$

$z_o = 0$

$L_2 \neq L_1$ no existe el límite

2) $$f(z) = \frac{z^4}{|z|^4} = \frac{x^4 + 2\,x^2 y^2 + y^4 + i\,(\,2\,x^3 y - 2\,x\,y^3\,)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$z_o = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} u = \dfrac{y^4}{y^4} = 1 \;\therefore\; \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} u = 1 \\ \lim_{y\to 0} u = \dfrac{x^4}{x^4} = 1 \;\therefore\; \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} u = 1 \end{cases}$$

No se puede asegurar nada, pero…

poniendo $z = r\,e^{i\phi}$ tenemos $|z| = r$ y $z^4 = r^4\,e^{i\,4\,\phi}$ entonces

$$f(z) = f(r\,e^{i\phi}) = e^{i\,4\,\phi} = \cos 4\phi + i\,sen\,4\phi$$

Como depende de ϕ, no existe el límite. Por ejemplo tomando $\phi = 0$, da 1 y tomando $\phi = \frac{1}{4}\pi$ da -1.

Propiedades

$$\lim_{z\to z_o}\left[f_1(z) \pm f_2(z)\right] = \lim_{z\to z_o} f_1(z) \pm \lim_{z\to z_o} f_2(z),$$

$$\lim_{z\to z_o}\left[f_1(z) \cdot f_2(z)\right] = \lim_{z\to z_o} f_1(z) \cdot \lim_{z\to z_o} f_2(z),$$

$$\lim_{z\to z_o}\left[f_1(z) / f_2(z)\right] = \lim_{z\to z_o} f_1(z) \;/\; \lim_{z\to z_o} f_2(z) \quad \text{siempre que} \quad \lim_{z\to z_o} f_2(z) \neq 0$$

Continuidad

Decir que $f(z)$ es continua en z_o equivale a decir:

1) existe $\lim_{z\to z_o} f(z)$, 2) existe $f(z_o)$, y 3) $\lim_{z\to z_o} f(z) = f(z_o)$

Propiedades

Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son continuas entonces son continuas $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$, y $f_1(z) / f_2(z)$, si $f_2(z_o) \neq 0$

Derivada

Dada una función f definida en un entorno de z, se llama derivada f' de f en z al límite

$$f'(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Nota: Escribiendo $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ vemos que $\Delta z \to 0$ si y solo si $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ la derivada es un límite doble pues:

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(z + \Delta x + i \Delta y) - f(z)}{\Delta x + i \Delta y}$$

Propiedades

La suma, resta, producto y cociente (siempre que no se anule el denominador) de funciones derivables es siempre derivable y vale:

$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$,

$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$, y

$[f(z) / g(z)]' = [f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)] / [g(z)]^2$, si $g(z) \neq 0$

Si $f(z) = c$, entonces $f'(z) = 0$; si $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = n z^{n-1}$.

Si f es derivable en z y g es derivable en $f(z)$ entonces $h(z) = g[f(z)]$ es derivable en z y vale $h'(z) = g'[f(z)] f'(z)$

Ejemplo:

$$f(z) = z^2, \qquad \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \frac{2 z \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z, \quad f'(z) = 2z = 2x + i\, 2y$$

$$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\, 2xy = u(x,y) + i\, v(x,y) \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \therefore \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ v(x,y) = 2xy \quad \therefore \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y, \ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}$$

Vemos pues que $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ y además $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Estas relaciones ¿valen siempre?

Dada $f(z) = f(x + i y) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, si existe $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ resulta

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+i\,v(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-i\,v(x,y)}{\Delta x+i\,\Delta y}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\left[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]+i\left[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\right]}{\Delta x+i\,\Delta y}$$ como es un límite doble

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)\right]+i\left[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)\right]}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right]-i\left[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right]}{\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial y}$$

y quedan las relaciones $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ llamadas condiciones de Cauchy-Riemann.

entonces u y v son derivables, satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann y $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

Ver Churchill (1992), Ahlfors (1953), Makushevich (1980).

De este resultado se deduce una condición muy útil que nos dice que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son dos funciones derivables pero que no cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann entonces $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ no es derivable.

Ejemplos:

1) $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$, $\begin{cases}u(x,y)=x^2+y^2\ \therefore\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\\ v(x,y)=0\ \therefore\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$

Si $z\neq 0$ no cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo tanto no es derivable.

Si $z = 0$ no sabemos, porque que cumpla las condiciones de Cauchy-Riemann no implica que sea derivable.

2) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^{*2}}{z} & si\ z\neq 0\\ 0 & si\ z=0\end{cases}$ escribiendo $\Delta z = r\, e^{i\phi}$, entonces $(\Delta z)^* = r\, e^{-i\phi}$ y entonces queda

$$\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{r^2\,e^{-2i\phi}/r\,e^{i\phi}}{r\,e^{i\phi}}=e^{-4i\phi}$$ depende de ϕ, no existe el límite, no es derivable.

3) $f(z)=\dfrac{z^{*3}}{|z|^2}=\dfrac{(x^3-3xy^2)+i(y^3-3x^2y)}{x^2+y^2}$, $\begin{cases}u=\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}\\ v=\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}\end{cases}$ si $z\neq 0$ y $f(0) = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{u(0+\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=1, \quad \dfrac{u(0,0+\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0 \\ \dfrac{v(0+\Delta x,0)-v(0,0)}{\Delta x}=0, \quad \dfrac{v(0,0+\Delta y)-v(0,0)}{\Delta y}=1 \end{cases}$$ Cumple Cauchy Riemann en $z=0$.

Que una función cumpla las condiciones de Cauchy Riemann no implica que sea derivable.

Teorema: Dada una función $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, si existen las derivadas parciales de u y v en un entorno de z, son continuas, y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces f es derivable en z.

¿Qué ocurre si para $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, derivable en z, existen además las derivadas segundas de u y v?

Si derivamos las condiciones de Cauchy-Riemann, una con respecto a x y la otra con respecto a y, o al revés, obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases}$$ Sumando las primeras o restando las segundas queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,,$$

tanto u como v satisfacen la misma ecuación diferencial, llamada ecuación de Laplace en dos dimensiones.

Las funciones que satisfacen la ecuación diferencial de Laplace se llaman armónicas, si se tienen dos funciones armónicas, $u(x, y)$ y $v(x, y)$, que además entre ellas satisfacen las relaciones de Cauchy-Riemann, se dice que v es armónica conjugada de u, y desde luego $w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ será una función derivable.

Ejemplo: Comprobar que $u(x, y) = e^x \cos y$ es armónica y encontrar una armónica conjugada.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y, \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \therefore \quad v = e^x \operatorname{sen} y + h(x) \therefore \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y + h'(x) \quad \therefore \quad v = e^x \operatorname{sen} y + c$$

Entonces tomando $c = 0$, podemos decir que $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ es una armónica conjugada de $u(x, y) = e^x \cos y$, y que la función $f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x\, e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$ es derivable, donde hemos usado que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$

Función exponencial

Se define $w = f(z) = e^z = e^x\, e^{iy} = e^{x+iy} = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$. Vemos que si $z = x + i\,0$, real, $f(x + i\,0) = e^x$ coincide sobre el eje real con la función vista en los cursos de análisis real.

Si $w = e^{z} = e^{x}\ e^{iy}$ entonces $|w| = |e^{z}| = e^{x}|e^{iy}| = e^{x} > 0$, además $arg(w)$ es una solución de $e^{i\phi} = w / |w| = e^{x}\ e^{iy} / e^{x} = e^{iy}$, es decir que $arg(w) = y$.

Propiedades:

1) $|e^{z}| = e^{x} > 0$, resulta $e^{z} \neq 0$, para todo z y $e^{0} = 1$.

2) Como $y = arg(e^{z})$, $e^{z+i2\pi} = e^{x}\ e^{i(y+i2\pi)} = e^{x}\ e^{iy} = e^{z}$, periódica de período $2\pi i$.

3) $e^{z1}\ e^{z2} = e^{x1}\ e^{iy1}\ e^{x2}\ e^{iy2} = e^{x1+x2}\ e^{i(y1+y2)} = e^{z1}\ e^{z2}$, y $e^{z1} / e^{z2} = e^{z1-z2}$

4) $(e^{z})' = e^{z}$

Funciones trigonométricas

Recordar las funciones hiperbólicas: $ch\ y = ½\ (e^{y} + e^{-y})$, $sh\ y = ½\ (e^{y} - e^{-y})$

$ch\ 0 = 1,\ sh\ 0 = 0.$

$ch\ (-y) = ch\ y\ ,\ sh\ (-y) = -\ sh\ y$

$(ch\ y)' = sh\ y,\ (sh\ y)' = ch\ y$

$ch\ y > 0\ \therefore\ sh\ y$ creciente

$ch^2\ y - sh^2\ y = ¼\ (e^{y} + e^{-y})^2 - ¼\ (e^{y} - e^{-y})^2 = 1$

Como $\begin{cases} e^{i\phi} = cos\,\phi + i\ sen\,\phi \\ e^{-i\phi} = cos\,\phi - i\ sen\,\phi \end{cases}$ resulta $\begin{cases} sen\,\phi = \dfrac{\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right)}{2i} \\ cos\,\phi = \dfrac{\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right)}{2} \end{cases}$ Haciéndola valer para todo ϕ, se define

$$sen\ z = \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i},\ cos\ z = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{2}$$

Coinciden sobre el eje real con las funciones vistas en los cursos de análisis real, además

$$cos^2\ z + sen^2\ z = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}{4} - \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}{4} = e^{iz}\ e^{-iz} = 1$$

$sen(z_1 \pm z_2) = sen\ z_1\ cos\ z_2 \pm cos\ z_1\ sen\ z_2$

$cos(z_1 \pm z_2) = cos\ z_1\ cos\ z_2 \mp sen\ z_1\ sen\ z_2$

$$sen\ z = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} = \frac{e^{-y}(cos\ x + i\ sen\ x) - e^{y}(cos\ x - i\ sen\ x)}{2i} = sen\ x\frac{(e^{y} + e^{-y})}{2} + i\ cos\ x\frac{(e^{y} - e^{-y})}{2}$$

$sen\ z = sen\ x\ ch\ y + i\ cos\ x\ sh\ y$

$$cos\ z = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = \frac{e^{-y}(cos\ x + i\ sen\ x) + e^{y}(cos\ x - i\ sen\ x)}{2} = cos\ x\frac{(e^{y} + e^{-y})}{2} - i\ sen\ x\frac{(e^{y} - e^{-y})}{2}$$

$cos\ z = cos\ x\ ch\ y - i\ sen\ x\ sh\ y$

Se puede ver que las partes reales e imaginarias cumplen las condiciones de Cauchy Riemann, con derivadas continuas, por lo tanto son derivables y vale:

$$(sen\ z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = cos\ x\ ch\ y - i\ sen\ x\ sh\ y = cos\ z,\quad (cos\ z)' = -\ sen\ x\ ch\ y - i\ cos\ x\ sh\ y = -\ sen\ z$$

Hallar los ceros de $sen\ z$ y de $cos\ z$. Como sobre el eje real coinciden ya tenemos algunos. ¿Dónde están los otros?

$$sen\ z = 0 \begin{cases} sen\ x\ ch\ y = 0, & \text{como} \quad ch\ y > 0 \quad \text{debe ser} \quad sen\ x = 0 \quad \therefore \quad x = k\,\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ cos\ x\ sh\ y = 0, & \text{como} \ cos\ k\,\pi = (-1)^k \neq 0, \ \text{debe ser} \ sh\ y = 0 \ \therefore \ y = 0, \ z = k\,\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Los reales son los únicos ceros.

$$cos\ z = 0 \begin{cases} cos\ x\ ch\ y = 0, & \text{como} \quad ch\ y > 0 \quad \text{debe ser} \quad cos\ x = 0 \quad \therefore \quad x = (2k+1)\,\pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ sen\ x\ sh\ y = 0, & \text{como} \ sen\,(2k+1)\pi/2 = (-1)^k \neq 0, \ \text{debe ser} \ sh\ y = 0 \ \therefore \ y = 0, \ z = (2k+1)\,\pi/2, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Los reales son los únicos ceros.

Ver Churchill (1992), Markushevich (1980), Zill (2011).

Función logaritmo

Escribiremos el logaritmo neperiano de un número real x, visto en los cursos de análisis real, como $ln\ x$.

¿Cómo definir una función $w = log\ z$? Deberá cumplir que $z = e^w$ pero $e^w \neq 0 \ \therefore \ log\ z$ no estará definida para $z = 0$.

$log\ z = u(x,y) + i\ v(x,y) \ \therefore z = e^{u+iv} = e^u e^{iv}, |z| = e^u, arg\ z = v$, es decir $u = ln\ |z|$ y $v = arg\ z$.

Al escribir $log\ z = ln\ |z| + i\ arg\ z$, la función no queda definida en forma unívoca.

Si se toma $Arg\ z$, recordando que $-\pi < Arg\ z \leq \pi$, se tiene la función $Log\ z = ln\ |z| + i\ Arg\ z$, que es discontinua sobre el semieje real no positivo.

Ver Feyel (1980), Zill (2011).

Si la restringimos a los valores no nulos tales que $-\pi < Arg\ z < \pi$, ¿será derivable? En caso afirmativo, ¿cuánto vale dicha derivada?

$$Log\ z = \frac{1}{2} ln(x^2 + y^2) + i\ Arg(\frac{y}{x}), \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Las derivadas parciales cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y son continuas en el dominio donde Log z es derivable, por lo tanto es derivable, y vale

$$(Log\ z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

Transformación de regiones

1) $w = 1/z \quad \therefore \quad z = 1/w$

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}, \\ y = \dfrac{-v}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

$x = c_1 > ½$

$u^2 + v^2 = (1/c_1)\, u \;\;\therefore\;\; (u - {}^1/_{2c1})^2 + v^2 = ¼c_1^2$

$x = -c_2$

$u^2 + v^2 = -(1/c_2)\, u \;\;\therefore\;\; (u + {}^1/_{2c2})^2 + v^2 = ¼c_2^2$

$y = d_1 > ½$

$u^2 + v^2 = -(1/d_1)\, v \;\;\therefore\;\; u^2 + (u + {}^1/_{2d1})^2 = ¼d_1^2$

$y = -d_2$

$u^2 + v^2 = (1/d_2)\, v \;\;\therefore\;\; u^2 + (u - {}^1/_{2d2})^2 = ¼d_2^2$

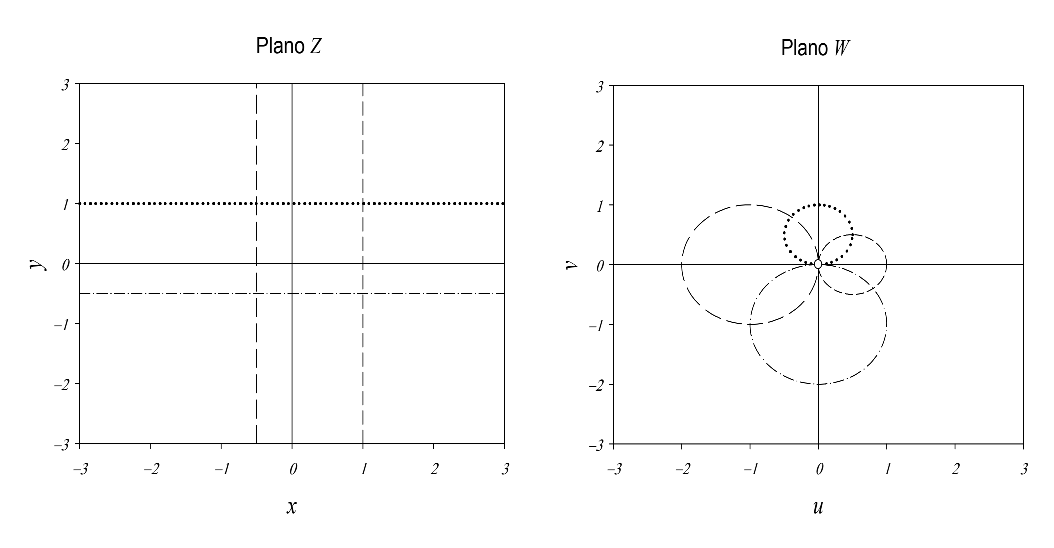


Figura 2.4 *La inversa trasforma rectas verticales y horizontales en circunferencias, centradas sobre el eje real e imaginario, respectivamente, que pasan por el origen*

2) $w = e^z \;\;\therefore\;\; w = e^x e^{iy}$

$$\begin{cases} |w| = e^x, \\ Arg(w) = y \end{cases}$$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$e^{x1} \leq e^x \leq e^{x2}$

$e^{x1} \leq |w| \leq e^{x2}$

$y_1 \leq y \leq y_2$

$y_1 \leq arg(w) \leq y_2$

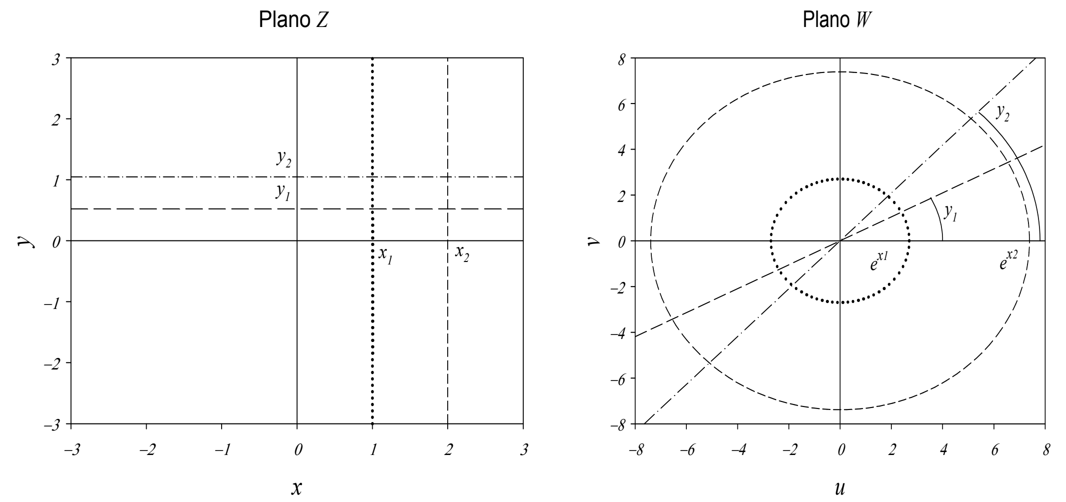


Figura 2.5 *La función exponencial trasforma las rectas verticales en circunferencias centradas en el origen, y las rectas horizontales en rectas que pasan por el origen.*

3) $w = sen\ z$ $\qquad \begin{cases} u = sen\ x \ \ ch\ y, \\ v = cos\ x \ \ sh\ y \end{cases}$

$x = c_1, \ -\tfrac{1}{2}\pi \le c_1 \le \tfrac{1}{2}\pi \qquad \begin{cases} u = sen\ c_1 \ \ ch\ y, \\ v = cos\ c_1 \ \ sh\ y \end{cases}$

$y_1 \le y \le y_2$

$-sh\ y_1 \le sh\ y \le sh\ y_1$

$1 \le ch\ y \le ch\ y_1$

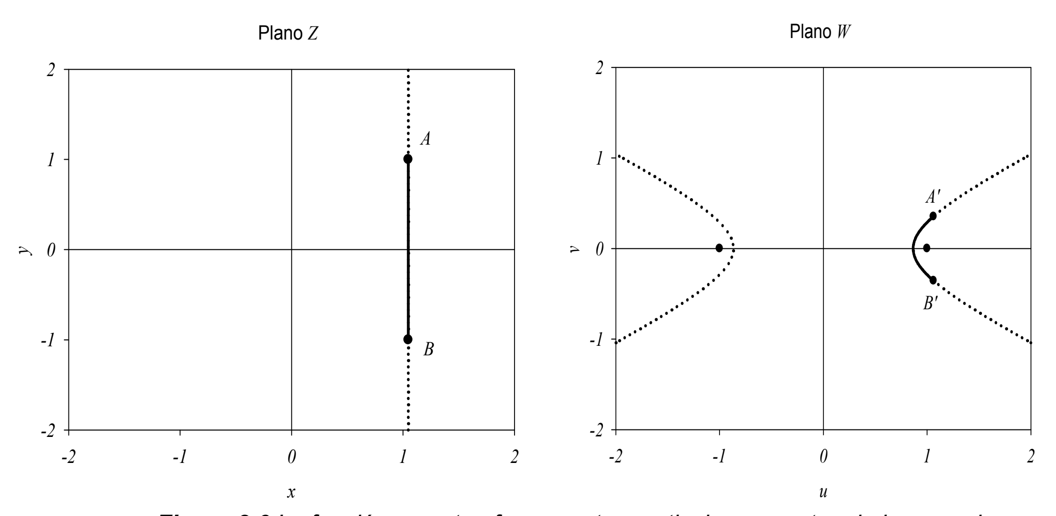


Figura 2.6 *La función seno trasforma rectas verticales en partes de la rama de una hipérbola centra en el origen, con focos en –1 y 1.*

$c_1 = 0 \qquad \begin{cases} u = 0, \\ v = sh\ y \end{cases} \quad -sh\ y_1 \le v \le sh\ y_1$

$c_1 = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \begin{cases} u = ch\ y, \\ v = 0 \end{cases} \quad 1 \le u \le ch\ y_1$

$0 \leq c_1 \leq ½\, \pi \qquad \dfrac{u^2}{sen^2 c_1} - \dfrac{v^2}{cos^2 c_1} = 1,$ hipérbola $\begin{cases} a^2 = sen^2 c_1 \\ b^2 = cos^2 c_1 \\ c^2 = a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$

focos $(+1, -1)$, asíntotas $y = \pm (a/b)\, x = \pm (tg\, c_1)\, x$

para $-½\, \pi \leq c_1 \leq 0$ da la otra rama

$y = c_2 > 0 \qquad \begin{cases} u = sen\, x\ \ ch\, c_2, \\ v = cos\, x\ \ sh\, c_2 \end{cases}$

como $c_2 > 0$, $sh\, c_2 > 0$, y $ch\, c_2 > 1$

$\dfrac{u^2}{ch^2 c_2} + \dfrac{v^2}{sh^2 c_2} = 1,$ elipse $\begin{cases} a^2 = ch^2 c_2 \\ b^2 = sh^2 c_2 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 1 \end{cases}$

focos $(+1, -1)$.

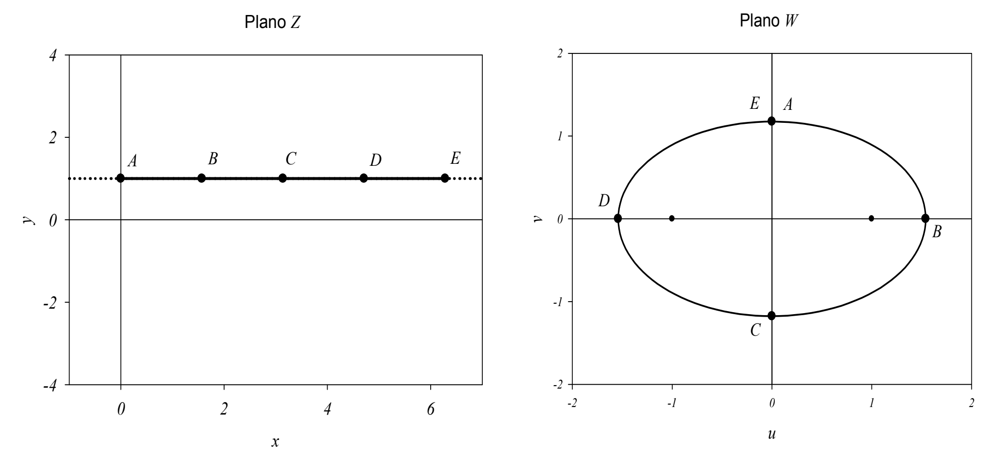


Figura 2.7 *La función seno trasforma rectas horizontales en partes de una elipse centrada en el origen, con focos en –1 y 1.*

Ver Feyel (1980), Spiegel (1991).

Funciones analíticas

Diremos que una función de variable compleja $w = f(z)$, definida en un dominio Ω es analítica en $z_o \in \Omega$ si existe un entorno de z_o en Ω donde f es derivable.

Está claro entonces que no basta con que f sea derivable en z_o para que f sea analítica en z_o.

Del mismo modo diremos que f es analítica en Ω cuando f es derivable en todo Ω. Mientras que si f es derivable en todo el plano complejo diremos que f es entera.

Ver Ahlfors (1953), Cartan (1968), Makushevich (1970).

Referencias

Ahlfors, L.V.(1953). Complex analysis. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Cartan, H. (1968). *Teoría elemental de funciones analíticas de una a varias variables complejas*. Madrid. España. Selecciones Científicas.

Churchill, R.V. y Brown, J.W. (1992). *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid. España. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

Feyel, D. y Pradelle A. (1980). *Ejercicios sobre las funciones analíticas*. Madrid. España. Paraninfo.

Markushevich, A. (1970). Teoría de las funciones analíticas. Tomo I. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Spiegel, M.R. (1991). *Variable compleja*. México D.F. México. McGraw-Hill/ Interamericana de México, S.A.

Zill D.G. y Shanahan P.D. (2011). *Introducción al Análisis complejo con aplicaciones*. México D.F. México. Cengage Learning Editores.

CAPÍTULO 3

Curvas e integración en el plano complejo

Matias Rafti

Claro caminito criollo florido y soleado
con pañuelo bordeado vos me viste pasar
Mientras los pastos amigos
que saben mi anhelo.
Como dulce consuelo
su verde saludo
me hacían llegar.

C.Gardel, A.Le Pera, CAMINITO SOLEADO.

3.1 Curvas en el plano complejo

Una curva γ en el plano complejo puede estar dada en forma paramétrica si existen dos números reales $t_1 < t_2$, y es una función $\gamma : [t_1, t_2] \to C$. Se emplea la notación

$$\gamma \ : \begin{cases} z = z(t) = x(t) + i\, y(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$ Equivalente a la de los cursos de análisis real $$\gamma \ : \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t)\, , y(t)) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

Vamos a suponer que $x(t)$ e $y(t)$ son continuas en $t_1 \le t \le t_2$. En este caso la curva se denomina arco. Si γ es un arco que además cumple que para todo t y t', si $t' \ne t$ entonces $z(t') \ne z(t)$, se llamará arco simple (no se cruza con el mismo).

Ejemplo:

$$\gamma \ : \begin{cases} z = z(t) = (1 - t\,)\, z_1 + \, t\, z_2 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Es el segmento de recta que une z_1 con z_2.

Se puede definir la curva inversa $-\gamma$, usando la misma función $z(t)$

$$-\gamma \ : \begin{cases} z = \tilde{z}(t) = z(t_1 + t_2 - t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

En el ejemplo sería

$$-\gamma \ : \begin{cases} z = z(1 - t) = t\ z_1 + (1 - t\,)\, z_2 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Si γ es un arco simple excepto que $z(t_2) = z(t_1)$ se llamará arco simple cerrado o curva de Jordan.

Ejemplo:

$$\gamma\ :\begin{cases} z = z(t) = z_0 + r_0\, e^{i\,t} \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases} \qquad \text{si} \quad z_0 = x_0 + i\,y_0 \quad \text{recordando} \quad r_0\, e^{i\,t} = r_0 \cos t + i\, r_0\, sen\, t \qquad \begin{cases} x(t) = x_0 + r_0 \cos t \\ y(t) = y_0 + r_0\, sen\, t \end{cases}$$

Es una circunferencia de centro z_o y radio r_o, recorrida en sentido anti horario.

Si γ es un arco simple y existen $x'(t)$ e $y'(t)$, se define $z'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$, y si además $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas y $z'(t) \neq 0$ se lo denomina arco suave. Todo arco suave a trozos se llama contorno, o sea es la unión de un número finito de arcos suaves conectados por sus extremos. Análogamente se puede definir un contorno simple cerrado.

¿Cuál es la longitud L de un arco suave?

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt = \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)|\ dt$$

Recordar que en los cursos de análisis real se tomaba $\mathbf{r}'(t) = (\ x'(t)\ ,\ \ y'(t)\ )$ y se calculaba L como

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{r}'(t)\|\ \ dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt$$

Asimismo se define el parámetro longitud de arco s como

$$s(t) = \int_{t_1}^{t} \|\mathbf{r}'(\tau)\|\ d\tau \quad \text{de manera que} \quad \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| \quad \text{es decir que} \quad \frac{dt}{ds} = 1/\|\mathbf{r}'(t)\|$$

Además el vector tangente unitario $\mathbf{t}_\gamma$(t) a una curva γ en el punto $\mathbf{r}(t)$, se definía como

$$\mathbf{t}_\gamma(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

De esta forma si $\lambda(x,y)$ era una función definida sobre la curva γ, la derivada de λ a lo largo de γ estaba dada por

$$\left.\frac{d\lambda}{ds}\right|_\gamma = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\lambda}{\partial y}y'(t)\right)\frac{dt}{ds} = \nabla\lambda\ \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \nabla\lambda \cdot \mathbf{t}_\gamma$$

se puede escribir en forma indistinta $\left.\dfrac{d\lambda}{ds}\right|_\gamma = \left.\dfrac{d\lambda}{ds}\right|_{\mathbf{t}_\gamma}$

Entonces si γ es un arco suave, definimos el vector tangente unitario en el punto $z(t)$ al número complejo

$$\mathrm{T}(t) = \frac{z'(t)}{|\,z'(t)\,|} = \frac{x'(t) + i\,y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

De manera que la inclinación de la curva, es decir el ángulo que forma la tangente a la curva en $z(t)$ con el eje real positivo es $\phi(t) = arg\ (T(t)) = arg\ (z'(t))$.

Vemos pues como se puede emplear el módulo y el argumento de $z'(t)$ para determinar la longitud de la curva y su inclinación respectivamente.

3.2 Transformación conforme

Consideremos un dominio $\Omega \subset C$, una curva $\gamma \subset \Omega$, y una función f definida sobre Ω. Entonces la imagen por f de γ, será una curva $\Gamma = f(\gamma)$ en C que si f es analítica sobre γ , será diferenciable.

Ejemplo:

$$\gamma_1 \ : \begin{cases} z = z_1(t) = t + i\sqrt{t^2 - 3}\ _2 \\ \sqrt{3} \le t \le 10 \end{cases} \qquad \gamma_2 \ : \begin{cases} z = z_2(t) = t + i\dfrac{2}{t}\ _2 \\ \sqrt{3} \le t \le 10 \end{cases}$$

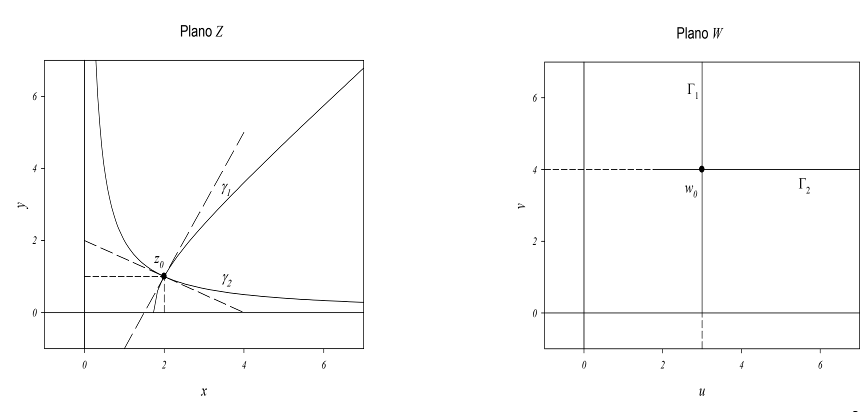


Figura 3.1 *Las curvas □□ y □□ son las imágenes de □□ y □□ mediante w = z^2, se muestran sus tangentes en el punto de intersección z_0 = 2 + i.*

Ambas curvas se cortan en el punto $z_o = 2 + i$. Si ahora consideramos la función $w = f(z) = z^2$, el punto z_o irá, por dicha transformación al punto $w_o = f(z_o) = 3 + 4\ i$, y las curvas γ_1 y γ_2, a las curvas Γ_1 y Γ_2 dadas por

$$\Gamma_1 \ : \begin{cases} w = w_1(t) = 3 + i\ 2\,t\sqrt{t^2 - 3} \\ \sqrt{3} \le t \le 10 \end{cases} \qquad \Gamma_2 \ : \begin{cases} w = w_2(t) = \left(t^2 - \dfrac{4}{t^2}\right) + i\ 4 \\ \sqrt{3} \le t \le 10 \end{cases}$$

Definición: Dado un dominio $\Omega \subset C$, una función $f : \Omega \to C$, y z_o un punto en el interior de Ω. Si para todo par de curvas suaves γ_1 y γ_2 en Ω, que pasan por z_o, el ánglo que forman sus tangentes es igual al que forman sus respectivas imágenes en $w_o = f(z_o)$, diremos que la función f es conforme en z_o.

$w(t) = f(z(t))$ si f es diferenciable entonces $w'(t) = f'(z(t))\ z'(t)$ en z_o queda $w'(t_o) = f'(z_o)\ z'(t_o)$

Si $f'(z_o) \neq 0$ entonces para cualquier $z(t)$ diferenciable $arg(w'(t_o)) = arg(f'(z_o)) + arg(z'(t_o))$

En particular para γ_1 y γ_2 se tiene

$$arg(w_1'(t_o)) = arg(f'(z_o)) + arg(z_1'(t_o))$$

$$arg(w_2'(t_o)) = arg(f'(z_o)) + arg(z_2'(t_o))$$

Llamando ϕ_1 y ϕ_2 a las pendientes en z_o de γ_1 y γ_2, respectivamente, y θ_1 y θ_2 a las de sus imágenes en $w_o = f(z_o)$, o sea $\phi_1 = arg(z_1'(t_o))$ y $\phi_2 = arg(z_2'(t_o))$, mientras que $\theta_1 = arg(w_1'(t_o))$ y $\theta_2 = arg(w_2'(t_o))$, resulta

$$\theta_2 = arg(f'(z_o)) + \phi_2$$

$$\theta_1 = arg(f'(z_o)) + \phi_1$$

De manera que el ángulo que forman cada uno se obtiene restando y queda: $\theta_2 - \theta_1 = \phi_2 - \phi_1$

Teorema: Dado un dominio $\Omega \subset C$, una función $f : \Omega \rightarrow C$, y z_o un punto en el interior de Ω. Si f es analítica en z_o y además $f'(z_o) \neq 0$ entonces f es conforme en z_o.

3.3 Transformación de funciones armónicas

Observación: En lo que sigue vamos a suponer que las funciones analíticas tienen derivada de todo orden. Esta suposición será demostrada más adelante.

3.3.1 PROBLEMA 1. Transformación de regiones

Se desea encontrar una función armónica $\lambda(x,y)$ en un dominio Ω_z, en general no muy simple.

Para resolver este problema nos vamos a valer de una función $w = f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$, analítica en Ω_z, que transforma el dominio Ω_z en otro Ω_w mucho más sencillo, donde si es simple encontrar una función armónica $\Lambda(u,v)$.

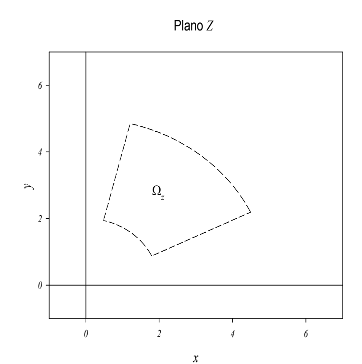
Entonces, será posible encontrar otra función $\mu(u,v)$, armónica conjugada de $\Lambda(u,v)$ en Ω_w, de manera que la función $g(w) = \Lambda(u,v) + i\,\mathrm{M}(u,v)$ es analítica en Ω_w.

La función composición $h(z) = g(f(z))$ es analítica en Ω_z, y puede escribirse como

$$h(z) = \Lambda(u(x,y),v(x,y)) + i\,\mathrm{M}(u(x,y),v(x,y)) = \lambda(x,y) + i\,\mu(x,y)$$

De manera que por ejemplo su parte real $\lambda(x,y)$ será armónica en Ω_z, que es lo que queríamos encontrar.

Además $\mu(x,y)$, por ser la armónica conjugada de $\lambda(x,y)$, tendrá la característica que sus curvas de nivel serán ortogonales a las curvas de nivel de $\mu(x,y)$, o sea que si las curvas $\lambda(x,y) = \lambda_0$ representan isotermas, las curvas $\mu(x,y) = \mu_0$ representarán las líneas de flujo térmico, y si las curvas $\lambda(x,y) = \lambda_0$ representan equipotenciales, las curvas $\mu(x,y) = \mu_0$ representarán las líneas del campo eléctrico.



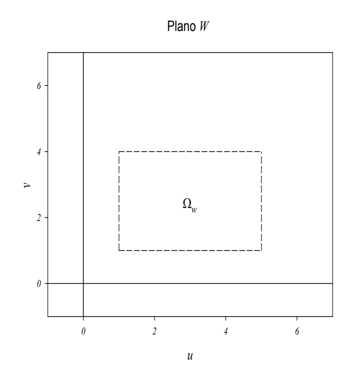


***Figura 3.2** Las región Ω_w representa la imagen, en el plano W, de la región Ω_z del plano Z mediante $w = f(z)$*

3.3.2 Teorema: Si $w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ es analítica en un dominio Ω_z, y transforma Ω_z en otro dominio Ω_w, y además $\Lambda(u,v)$ es armónica en Ω_w, entonces $\lambda(x,y) = \Lambda(u(x,y),v(x,y))$ es armónica en Ω_z.

3.3.3 Ejemplo: Encontrar una función armónica en $\Omega_z = \{(x,y) \,/\, x > 0,\ y > 0\}$, cuando se tiene que $\Lambda(u,v) = e^{-v}\, sen\, u$, que es armónica en $\Omega_w = \{(u,v) \,/\, v > 0\}$. Ya hemos visto que $w = f(z) = z^2$ es analítica y transforma Ω_z en Ω_w, por lo tanto $\lambda(x,y) = \Lambda(u(x,y),v(x,y))$ será armónica en Ω_z. Como $w = f(z) = z^2 = u(x,y) + i\, v(x,y) = x^2 - y^2 + i\, 2xy$, resulta que $\lambda(x,y) = e^{-2xy}\, sen(x^2 - y^2)$

3.3.4 PROBLEMA 2. Transformación de las condiciones de frontera

Se desea encontrar una función armónica $\lambda(x,y)$ en un dominio simplemente conexo Ω_z, cuando se dan condiciones sobre $\Lambda(x,y)$ a lo largo de la frontera de Ω_z.

Si se conoce el valor de $\lambda(x,y)$ a lo largo de la frontera de Ω_z, se dice que es un problema de Dirichlet.

Si se conoce el valor de la derivada normal de $\lambda(x,y)$ a la frontera de Ω_z, se dice que es un problema de Newman.

Suponemos que conocemos una función $w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, analítica en Ω_z, que transforma el dominio Ω_z en otro Ω_w, y la frontera γ de Ω_z en la frontera Γ de Ω_w, y se cumple $f'(z) \neq 0$.

Podemos ver que

1) Si se cumple la condición de Dirichlet que $\Lambda(u,v) = c_0$ sobre Γ, entonces se deberá cumplir la condición de Dirichlet $\lambda(x,y) = \Lambda(u(x,y),v(x,y)) = c_0$ sobre γ.

Pues si la curva Γ es la frontera de Ω_w, imagen por $w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ de la curva γ, y se cumple que si $(u,v) \in \Gamma$ entones $\Lambda(u,v) = c_0$; y si ahora tomamos cualquier $(x, y) \in \gamma$ como $(u(x,y),v(x,y)) \in \Gamma$ se tendrá que verificar que $\Lambda(u(x,y),v(x,y)) = \lambda(x,y) = c_0$.

2) Si se cumple la condición de Newman que la derivada normal de $\Lambda(u,v)$ es cero sobre Γ, entonces la misma condición se verifica con $\lambda(x,y) = \Lambda(u(x,y),v(x,y))$ sobre γ, es decir la derivada normal de $\lambda(x,y)$ es cero sobre γ.

Para verlo supongamos que $d\Lambda/ds \,|\, \mathbf{n}_\Gamma = \nabla\Lambda\ \mathbf{n}_\Gamma = 0$ sobre Γ, y tomemos un punto (x_o, y_o) sobre γ entonces tenemos $(u_o, v_o) = (u(x_o, y_o),v(x_o, y_o)) \in \Gamma$, si ahora llamamos Γ_c a la curva de nivel $\Lambda(u,v) = \Lambda(u_o,v_o) = c_o$, que obviamente pasa por (u_o, v_o), sabemos de los cursos de análisis que $\nabla\Lambda\ \mathbf{t}_{\Gamma c} = 0$, donde $\mathbf{t}_{\Gamma c}$ es el vector tangente a Γ_c en (u_o, v_o). (El gradiente de la función es perpendicular a la curva de nivel que pasa por dicho punto). De manera que los vectores $\mathbf{n}_\Gamma$ y $\mathbf{t}_{\Gamma c}$ son paralelos, o dicho en otras palabras las curvas Γ y Γ_c son perpendiculares. Pero por otra parte las curvas Γ y Γ_c son las imágenes por $w = f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ de las curvas γ y γ_c, respectivamente. Donde γ_c es la curva de nivel $\lambda(x,y) = \lambda(x_o,y_o) = \Lambda(u_o,v_o) = c_0$. Como $f'(z) \neq 0$ la transformación es conforme, es decir las curvas γ y γ_c también son perpendiculares. De manera que los vectores $\mathbf{n}_\gamma$ y $\mathbf{t}_{\gamma c}$ son paralelos, y finalmente llegamos a que $d\lambda/ds \,|\, \mathbf{n}_\gamma = \nabla\lambda\ \mathbf{n}_\gamma = 0$ sobre γ.

3.3.5 Teorema: Si $w = f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$ es analítica y conforme, transformando una curva γ en una curva Γ, y $\Lambda(u,v)$ es diferenciable sobre Γ. Entonces si $\Lambda(u,v)$ satisface que $\Lambda\big|_\Gamma = c_0$ o $d\Lambda/ds\big|\mathbf{n}_\Gamma = \nabla\lambda\ \mathbf{n}_\Gamma = 0$ a lo largo de Γ entonces $\lambda(x,y) = \Lambda(u(x,y),v(x,y))$ satisface las mismas condiciones sobre γ.

3.3.6 Ejemplo. Un forma de calcular el potencial electrostático

Se desea encontrar el potencial electrostático $\lambda(x,y,z)$ en el interior de un cilindro, si la mitad de su borde está a un potencial $\lambda = \lambda_0$, y la otra mitad a potencial $\lambda = 0$. Se debe resolver la ecuación diferencial $\nabla^2\lambda(x,y,z) = 0$, si suponemos que el eje del cilindro coincide con el eje que pasa por el origen y es vertical al plano (x,y), entonces λ no depende de z, en otras palabras buscamos una función armónica $\lambda(x,y)$, con la condición, para $x^2+y^2 = 1$ (asumiendo el cilindro de radio 1) $\lambda = \lambda_0$, para $y > 0$, y $\lambda = 0$, para $y < 0$. Asimismo podemos tomar $\lambda_0 = 1$ (pues basta con multiplicar por el λ_0 real al resultado obtenido con $\lambda_0 = 1$). Teniendo en cuenta que la transformación $w = i(1- z)/(1+z)$ envía la región $x^2+y^2 < 1$, del plano (x,y), a la región $w > 0$, del plano (u,v), y a su vez el arco $x^2+y^2 = 1$, $y > 0$ va a la semi recta $w = 0$, $u > 0$, mientras que el arco $x^2+y^2 = 1$, $y < 0$ va a la semi recta $w = 0$, $u < 0$. El problema se reduce a encontrar una función armónica $\Lambda(u,v)$ en la región $v > 0$, tal que si $w = 0$, entonces $\Lambda = 1$, para $u > 0$, y $\Lambda = 0$, para $u < 0$. Como la función $Arg(w) = atan(u/v)$ es armónica en $v > 0$ (por ser la parte imaginaria de $Log(w)$), y para $v = 0$ vale 0 si $u > 0$, y π si $u < 0$, la respuesta para este caso puede ser $\Lambda(u,v) = 1 - 1/\pi\ atan(u/v)$, y además $w = i(1- z)/(1+z) =\{2y+ i[1 - (x^2+y^2)]\} / [(x+1)^2 + y^2] = u(x,y)+i\ v(x,y)$, da $u(x,y) = 2y / [(x+1)^2 + y^2]$, y $v(x,y) = [1 - (x^2+y^2)] / [(x+1)^2 + y^2]$. Por lo visto al principio de esta sección, la respuesta final del problema planteado queda entonces dada por $\lambda(x,y) = \Lambda(u(x,y),v(x,y)) = 1 - 1/\pi\ atan(u(x,y) /v(x,y)) = 1 - 1/\pi\ atan(2y / [1 - (x^2+y^2)])$

Otra forma de expresar este resultado a partir de la expresión $atan(u/v) = Arg(w) = Im\ \{Log(w)\}$, y $w = i(1- z)/(1+z)$, es a través de

$$Log(w) = Log\ i + Log\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = i\ \pi/2 - Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

entonces $$atan(u/v) = Im\ \{Log(w)\} = \pi/2 - Im\left\{ Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\},$$

De manera que finalmente se tiene:

$$\lambda(x,y) = 1-(1/\pi)\ atan\left(\frac{u(x,y)}{v(x,y)}\right) = 1- 1/2 + (1/\pi)\ Im\left\{ Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\} = 1/2 + (1/\pi)\ Im\left\{ Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\}$$

3.4 Integrales definidas

Si $F(t) = U(t) + i\ V(t)$, donde U y V son acotadas y continuas a trozos en $t_1 \le t \le t_2$, se define

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} U(t)\,dt + i\int_{t_1}^{t_2} U(t)\,dt$$ es decir

$$\begin{cases} Re\left\{\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt\right\} = \int_{t_1}^{t_2} Re\{F(t)\}\,dt \\ Im\left\{\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt\right\} = \int_{t_1}^{t_2} Im\{F(t)\}\,dt \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\int_0^2 \left[-2\,t + i\,(2-t^2\,)\right]dt = \int_0^2 -2\,t\;dt + i\int_0^2 (2-t^2\,)\,dt = -\,t^2\,\Big]_0^2 + i\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big]_0^2 = -4 - \frac{2}{3}i$$

Propiedades:

1) Si c es un número complejo entonces $\int_{t_1}^{t_2} c\,F(t)\,dt = c\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$

2) $\int_{t_1}^{t_2} \left[F(t) \pm G(t)\,\right]\,dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \pm \int_{t_1}^{t_2} G(t)\,dt$

3) Si $\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \neq 0,\;\; \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = r_0\;\,e^{i\,\phi_0}$ tenemos

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt\right| = r_0 = \int_{t_1}^{t_2} e^{-i\,\phi_0}\;F(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} Re\left\{e^{-i\,\phi_0}\,F(t)\right\}dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \left|e^{-i\,\phi_0}\,F(t)\right|dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|F(t)\right|dt$$

3.5 Integrales de línea

Si $\gamma\;:\begin{cases} z = z(t) = x(t) + i\;y(t) \\ t_1 \;\leq\; t \;\leq\; t_2 \end{cases}$ suave y va de $z_1 = z(t_1\,)$ a $z_2 = z(t_2\,)$ y $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ continua sobre γ, se define

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,z'\,(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[u(x,y) + i\;v(x,y)\right]\left[x'\,(t) + i\;y'\,(t)\right]dt = \int_\gamma (u\;dx - v\;dy)\;\; + i\int_\gamma (v\;dx + u\;dy)$$

Observación:

Otra forma de parametrizar $-\gamma$ es la siguiente:

$-\gamma\;\;:\begin{cases} z = \tilde{z}(\,\tau\,) = z(-\tau\,) \\ -t_2 \;\leq\; \tau \;\leq\; -t_1 \end{cases}$ entonces $\int_{-\gamma} f(z)\,dz \;= \int_{-t_2}^{-t_1} f(z(-\tau\,))\,z'\,(-\tau\,)\,d\tau = \int_{t_2}^{t_1} f(z(t))\,z'\,(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz$

3.5.1 Propiedades:

1) Si c es un número complejo entonces $\int_\gamma c\;f(z)\,dz = c\int_\gamma f(z)\,dz$

2) $\int_\gamma \left[f(z) \pm g(z)\right]dz = \int_\gamma f(z)\,dz \pm \int_\gamma g(z)\,dz$

3) $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = \int_{-t_2}^{-t_1} f(\tilde{z}(t))\,\tilde{z}'\,(t)\,dt \;= \int_{t_2}^{t_1} f(z(t)\,(-z'\,(t))\,(-dt) = -\int_{t_1}^{t_2} f(z(t)\,z'\,(t)\,dt \;= -\int_\gamma f(z)\,dz$

4) Si γ_1 va de z_1 a z_2, y γ_2 de z_2 a z_3, se define $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ y se cumple $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

5) Si $|f(z)| \leq M$ sobre γ, $L_\gamma = \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)|\,dt$ longitud de la curva, entonces

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} |z'(t)|\,dt \right| \leq M\,L_\gamma$$

3.5.2 Ejemplos:

1)

$$\gamma_1 : \begin{cases} z = z(t) = (1-t)\,0 + t\,(1+2i) = (1+2i)\,t \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f(z) = z^2\ ,\ z'(t) = (-3+2i) \\ f(z(t)) = (1+2i)^2\,t^2 = (-3+4i)\,t^2 \end{array}$$

$$\int_{\gamma_1} z^2\,dz = \int_0^1 (-3+4i)\,t^2\,(1+2i)\,dt = (-11-2i)\int_0^1 t^2\,dt = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

2)

$$\gamma_2 : \begin{cases} z = t & z'(t) = 1 \\ 0 \leq t \leq 1 & f(z(t)) = t^2 \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} z = (1-t) + t(1+2i) = 1 + 2i\,t & z'(t) = 2i \\ 0 \leq t \leq 1 & f(z(t)) = (1-4\,t^2) + 4it \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_2} z^2\,dz = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\gamma_3} z^2\,dz = 2i\int_0^1 \left[(1-4\,t^2) + 4\,i\,t\right]dt = -4 + 2i(t - 4/3\,t^3) = -4 - \frac{2}{3}i$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} z^2\,dz = \frac{1}{3} - 4 - \frac{2}{3}i = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}i$$

3.5.3 Observación:

Si se considera ahora la curva cerrada $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup (-\gamma_1)$, resulta $\oint_\gamma z^2\,dz = 0$

¿Siempre ocurre esto con las curvas cerradas?

3.5.4 Ejemplo:

$$\gamma_4 : \begin{cases} z = z(t) = r_0\,e^{i\,t} \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f(z) = 1/z\ ,\ z'(t) = i\,r_0\,e^{i\,t} \\ f(z(t)) = 1/r_0\ e^{-i\,t} \end{array}$$

$$\oint_{\gamma_4} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\,\pi\,i \neq 0$$

Recordatorio de cursos de análisis real en dos variables

3.5.5 Definición: Un dominio Ω se denomina simplemente conexo sii toda curva simple cerrada γ interior a Ω encierra solo puntos de Ω. (Es decir los dominios simplemente conexos no tienen agujeros).

3.5.6 Teorema de Green: Si *P(x,y)* y *Q(x,y)* son dos funciones derivables, con derivadas continuas en todo punto de un dominio simplemente conexo Ω, y γ es una curva simple cerrada interior a Ω , entonces:

$$\oint_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\text{Interior } \gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\ dy$$

3.5.7 Nota: Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en Ω, y además $f'(z)$ es continua en Ω, entonces para toda curva simple cerrada γ se cumple:

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\oint_{\gamma} v\,dx + u\,dy = \iint_{\text{Int. } \gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\ dy + i \iint_{\text{Int. } \gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\ dy = 0$$

Debido a las condiciones de Cauchy-Riemann. Ver Cartan (1968).

En particular, para $f(z) = 1$, $f'(z) = 0$ es continua y entonces $\int dz = 0$, y si $f(z) = z$, $f'(z) = 1$ es continua y entonces $\int z\,dz = 0$, y muchas más.

¿Qué pasa si tenemos una función analítica cualquiera?

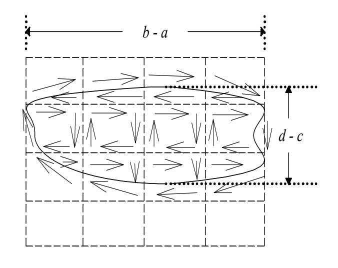
3.5.8 Teorema de Cauchy – Goursat: Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo Ω, entonces para toda curva simple cerrada γ interior a Ω , se cumple $\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$

Basta probar que $\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| < \varepsilon$, para cualquier número real positivo ε.

La curva γ , por ser cerrada (acotada) es posible encerrarla en un cuadrado, digamos que de lado $(b - a)$.

Ver Ahlfors (1953), Dettman (1965), Fuster (1995), Lang (1985).

Dicho cuadrado se puede a su vez subdividir en n^2 cuadraditos más pequeños de lado $(b - a)/n$.



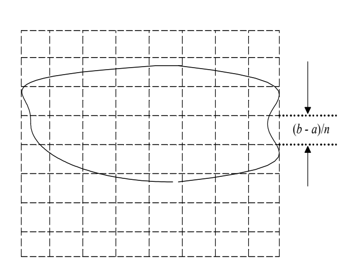


***Figura 3.3** La región Ω, limitada por la curva γ, puede subdividirse en no más de n^2 cuadrados, de lado $(b - a)/n$, recorriéndose cada uno de ellos en sentido anti horario.*

Llamemos γ_j a las curvas cerradas formadas por los bordes de cada cuadradito interior a γ.

Entonces, más allá de la deformación de algunos pequeños cuadrados adyacentes a γ, se tiene:

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j \le n^2} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

pues se cancelan todas las integrales del interior.

Por ser $f(z)$ derivable, siempre es posible encontrar dentro de cada curva γ_j un punto z_j donde

$$\left|\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}-f'(z_j)\right|<\delta \text{ dentro y sobre } \gamma_j \text{, puesto que } f'(z_j) = \lim_{z\to z_j}\frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}$$

para todo z en el interior o sobre γ_j , con tomar n es suficientemente grande.

Ahora si definimos sobre cada γ_j y su interior la función

$$\varphi_j(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j}-f'(z_j) & \text{si } z\neq z_j\\ 0 & \text{si } z=z_j\end{cases}$$ cumple que $|\varphi_j(z)|<\delta$, sobre γ_j y su interior.

Entonces como sobre γ_j se verifica $f(z) = f(z_j) + f'(z_j)\ (z - z_j) + \varphi_j(z)\ (z - z_j)$ tanto si $z \neq z_j$ o si $z = z_j$, resulta pues:

$$\oint_{\gamma_j} f(z)\,dz=\oint_{\gamma_j} f(z_j)\,dz+\oint_{\gamma_j} f'(z_j)(z-z_j)\,dz+\oint_{\gamma_j}\varphi_j(z)\,(z-z_j)\,dz$$

$$\oint_{\gamma_j} f(z)\,dz=f(z_j)\oint_{\gamma_j} dz+f'(z_j)\oint_{\gamma_j}(z-z_j)\,dz+\oint_{\gamma_j}\varphi_j(z)\,(z-z_j)\,dz=\oint_{\gamma_j}\varphi_j(z)\,(z-z_j)\,dz$$

pues $\int dz = 0$, y $\int z\,dz = 0$. De manera que podemos buscar una cota de las integrales ya que

$$\left|\oint_{\gamma_j} f(z)\,dz\right|=\left|\oint_{\gamma_j}\varphi_j(z)\,(z-z_j)\,dz\right|\le M\,L_{\gamma_j}$$, donde M es una cota de $|\varphi_j(z)\,(z-z_j)|$ sobre γ_j y L_γ es la longitud de γ_j

y como $L_{\gamma j} \le 4\,(b-a)/n$, y $M \le \delta\,\sqrt{2}\,(b-a)/n$, se tiene $\left|\oint_{\gamma_j} f(z)\,dz\right|\le\delta\,4\sqrt{2}\,\dfrac{(b-a)^2}{n^2}$ y finalmente

resulta

$$\left|\oint_{\gamma} f(z)\,dz\right|\le\sum_{j\le n^2}\left|\oint_{\gamma_j} f(z)\,dz\right|\le\sum_{j\le n^2}\delta\,4\sqrt{2}\,\frac{(b-a)^2}{n^2}\le\delta\,4\sqrt{2}(b-a)^2$$

Por lo que tomando $\delta = \varepsilon/[4\sqrt{2}\,(b-a)^2]$ quedaría probada la hipótesis.

3.5.9 Observaciones

1) Independencia de caminos: Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo Ω, z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera de Ω, y γ_1 y γ_2 dos curvas simples que unen ambos puntos, entonces tomando la curva simple cerrada $\Gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$, resulta

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz-\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=0\quad\therefore\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Vemos además que este resultado es válido aún cuando las curvas γ_1 y γ_2 se cruzan.

2) Principio de deformación de caminos: A partir del Teorema de Cauchy-Goursat vemos que si γ_1 y γ_2 son dos curvas simples cerradas concéntricas (una adentro de la otra), γ_e y γ_s son dos segmentos que entran y salen de γ_1 a γ_2, y f es una función analítica sobre γ_1, γ_2 y la región entre ambas, entonces podemos considerar el camino $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_e \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_s$, y aplicando el teorema resulta:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_e} f(z)\,dz+\int_{\gamma_s} f(z)\,dz+\int_{-\gamma_2} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz-\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=0$$

Por lo tanto $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Un ejemplo muy sencillo en que se utiliza este resultado es para calcular la integral de $f(z) = 1/z$, a lo largo de cualquier curva simple cerrada γ_1 que encierre el punto $z = 0$, pus como se sabe que la integral para cualquier circunferencia con centro en el origen vale $2\pi i$, y siempre es posible encontrar una γ_2 interior a γ_1, y entonces:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

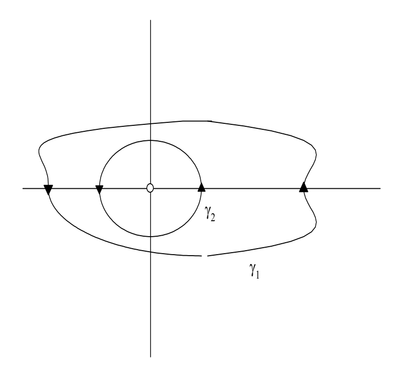


Figura 3.4 *La integral de $f(z)$ sobre la curva simple cerrada γ_1 es igual a la integral sobre la curva simple cerrada γ_2, interior a γ_1, siempre que $f(z)$ sea analítica en la región encerrada entre ambas curvas.*

Ver Feyel (1980), Makushevich (1970), Rivet (1998).

3.6 Una aplicación en magnetismo, la ley de Ampere

La ley de Ampere nos dice que la circulación del campo magnético $\boldsymbol{B}$ alrededor de una curva simple cerrada plana γ, que encierra un conjunto de corrientes $I_1, I_2, \ldots I_n$, que generan dicho campo, es igual al producto de la permeabilidad magnética , μ_0 si es en el vacío, por la suma de dichas corrientes (tomando en cuenta los signos + o – según que apunten hacia una u otra dirección del mencionado plano). Es decir:

$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\,d\,\boldsymbol{r} = \mu_0 \left(I_1 + I_2 + \ldots I_n \right)$$

Podemos mostrar este resultado a partir de la Ley de Biot – Savart, aplicada a una sola corriente, que supondremos que circula por un cable infinito, perpendicular al plano que contiene a γ.

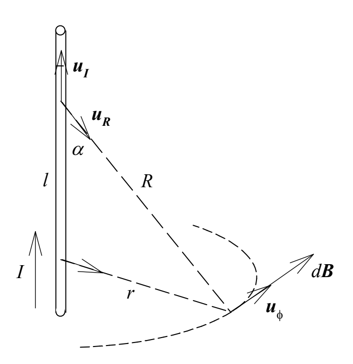


Figura 3.5 *El elemento de corriente $I\, \boldsymbol{u}_I\, dl$ genera el elemento de campo $d\boldsymbol{B}$.*

A partir de la figura, recordamos que la ley de Biot – Savart dice que cada elemento de corriente ubicado entre l y $l+dl$, que circula con una intensidad I en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u}_I$ (aquí la dirección positiva del eje z) es

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\, dl \frac{\boldsymbol{u}_I \times \boldsymbol{u}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\boldsymbol{u}_I \times \boldsymbol{u}_R}{R^2} dl$$

Donde R es la distancia del punto de coordenada l en el cable al punto $\boldsymbol{r}$ donde se calcula $d\boldsymbol{B}$, y $\boldsymbol{u}_R$ es un vector unitario apuntando en la dirección entre dicho puntos. Si ahora llamamos el ángulo α entre el segmento antes mencionado y el segmento, perpendicular al cable, que va del cable a $\boldsymbol{r}$, es decir que está en el plano de la curva, y r a la longitud de este segmento, tenemos:

$$\boldsymbol{u}_I \, x \, \boldsymbol{u}_R = sen\, \theta\, \boldsymbol{u}_\phi$$

$$r/l = tg\, \alpha = -\, tg\, \theta \qquad\qquad l = -\, r\, ctg\, \theta, \quad dl = (r\, /\, sen^2\, \theta)\, d\theta$$

$$r/R = sen\, \alpha = sen\, \theta$$

Donde θ es el complementario de α ($\theta = \pi - \alpha$), y $\boldsymbol{u}_\phi$ un vector unitario tangente a la curva γ en $\boldsymbol{r}$. Entonces

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ \boldsymbol{u}_\phi \frac{sen\, \theta}{r^2\, /\, sen^2\theta} \frac{r}{sen^2\theta}\ d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, r}\ \boldsymbol{u}_\phi\ sen\, \theta\, d\theta$$

E integrando desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, queda $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\, r}\ \boldsymbol{u}_\phi$

Ahora consideramos el plano, que contiene γ, en un sistema de ejes coordenados ortogonales (x,y), con centro en el punto donde el plano es atravesado por el cable, y entonces para cada punto $\boldsymbol{r} = (x,y)$ sobre la curva, los vectores radial $\boldsymbol{u}_r$ y tangente $\boldsymbol{u}_\phi$, donde obviamente $\boldsymbol{u}_\phi$ coincide con el $\boldsymbol{u}_\phi$ antes mencionado. De manera que se tiene

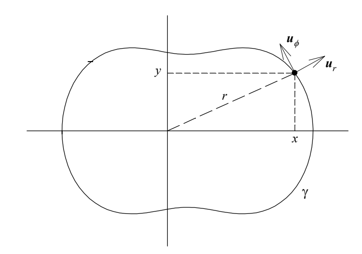


Figura 3.6 *En un punto sobre γ, se muestran los vectores radial $\mathbf{u}_r$ y perpendicular $\mathbf{u}_\phi$.*

$$\mathbf{u}_r = (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi) = (x/r ,\ y/r)$$

$$\mathbf{u}_\phi = (-\operatorname{sen}\phi, \cos\phi) = (-y/r, x/r)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}\right) \text{ y además } d\mathbf{r} = (dx, dy)$$

$$\oint_\gamma \mathbf{B}(\mathbf{r})\, d\,\mathbf{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_\gamma\left(-\frac{y}{r^2}dx + \frac{x}{r^2}dy\right)$$

Recordemos que si $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ entonces $\int f(z)\, dz = \int (u\, dx - v\, dy) + i \int (v\, dx + u\, dy)$ y podemos tomar $\int (v\, dx + u\, dy) = Im \{ \int f(z)\, dz \}$, en este caso es

$$\oint_\gamma\left(-\frac{y}{r^2}dx + \frac{x}{r^2}dy\right) = \oint_\gamma (v\, dx + u\, dy) \text{ donde ahora } u = \frac{x}{r^2}, v = -\frac{y}{r^2} \text{ o sea } f(z) = \frac{1}{z} \text{ y finalmente}$$

$$\oint_\gamma\left(-\frac{y}{r^2}dx + \frac{x}{r^2}dy\right) = Im\left\{\oint_\gamma \frac{1}{z}dz\right\} = Im\{2\pi i\} = 2\pi \text{, es decir que } \oint_\gamma \mathbf{B}(\mathbf{r})\, d\,\mathbf{r} = \mu_0 I$$

De manera que si existen ahora corrientes $I_1, I_2, \ldots I_n,$ por el principio de superposición se obtiene la fórmula de la ley de Ampere.

3.7 Primitivas

Una primitiva de una función f, definida en un dominio Ω, es una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para todo z en Ω.

Si $f'(z) = 0$ para todo z en un dominio Ω, entonces f es constante en Ω (Completarlo como ejercicio).

3.7.1 Teorema: Si f es una función continua en un dominio simplemente conexo Ω, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f tiene una primitiva en Ω

b) las integrales de f a lo largo de cualquier curva simple cerrada interior a Ω valen cero

c) las integrales de f a lo largo de cualquier curva simple que una a dos puntos fijos de Ω valen siempre lo mismo (propiedad de independencia de caminos).

a) $\rightarrow$ b)

Sea

$$\gamma \;:\begin{cases} z = z(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases} \quad z(t_1) = z(t_2) \text{ entonces } \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} F(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(z(t))}{dt}\,dt = F(z(t_2)) - F(z(t_1)) = 0$$

b) → c)

Si γ_1 y γ_2 son dos curvas simples cerradas que unen z_1 con z_2. Entonces $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ es una curva cerrada, y

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{-\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0 \text{ es decir } \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

c) → a)

Si tomamos z_0 en Ω y definimos

Si z_0 esta en Ω y se toma $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ Esta bien definida pues es independiente del camino.

¿Es $F'(z) = f(z)$?

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z}^{z_0} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta \text{ , y } \int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \left[\, f(\zeta) - f(z) \,\right] d\zeta$$

Por ser f continua en z, dado $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que si $|\Delta z| < \delta$ entonces $|f(z+\Delta z) - f(z)| < \varepsilon$

Si ahora tomamos como camino, entre z y $z+\Delta z$, el segmento que une ambos puntos, todos los ζ cumplen la condición $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ y además $L = |\Delta z|$, por lo tanto

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \le \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} |\Delta z| = \varepsilon \,.$$ Ver Churchill (1992).

3.8 Fórmula de la integral de Cauchy

Si f es una función analítica en el interior y sobre todos los puntos de un arco simple cerrado γ, y z_0 es un punto interior a γ, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Consideramos una curva simple cerrado γ_0 que consiste en una circunferencia con centro z_0 y radio r_0 suficientemente pequeño como para quedar incluido en γ. Es decir

$$\gamma_0 \;:\begin{cases} z = z(t) = z_0 + r_0\, e^{i\,t} \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases} \quad \frac{f(z)}{z - z_0} \text{ es analítica entre } \gamma \text{ y } \gamma_0$$

por la propiedad de deformacion de caminos queda

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\oint_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} + \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0) + \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz$$

Por ser f continua en z_0, con tomar r_0 suficientemente pequeño, se cumple que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|z - z_0| < \delta$, de manera que tomando $r_0 < \delta$, el módulo del integrando cumple $|\,[\,f(z) - f(z_0)]\,/(\,z - z_0)\,| < M = \varepsilon / r_0$, y como la longitud de la curva es $L_{\gamma 0} = 2\,\pi\, r_0$, resulta que

$$\left| \oint_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| < 2\pi\,\varepsilon, \text{ es decir que } \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

3.9 Derivada de funciones analíticas

Si f es una función analítica en el interior y sobre todos los puntos de un arco simple cerrado γ, y z es un punto interior a γ, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

De manera que podemos calcular las derivadas y queda entonces

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta, \quad f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta, \ldots, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

Una función analítica admite derivadas de todo orden.

3.9.1 Teorema de Morera

Si f es continua en un dominio simplemente conexo Ω, y la integral sobre toda curva simple cerrada interior a Ω vale cero, entonces f es analítica en Ω.

Por el resultado previo existe F en Ω tal que $F'(z) = f(z)$ en Ω, es decir F es analítica en Ω, pero entonces existen las derivadas de todo orden de F en Ω, en particular existe $F''(z) = f'(z)$ en Ω es decir f es analítica en Ω.

Referencias

Ahlfors, L.V.(1953). Complex analysis. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Cartan, H. (1968). *Teoría elemental de funciones analíticas de una a varias variables complejas*. Madrid. España. Selecciones Científicas.

Churchill, R.V. y Brown, J.W. (1992). *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid. España. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

Dettman, J.W. (1965). *Applied complex variables*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Feyel, D. y Pradelle A. (1980). *Ejercicios sobre las funciones analíticas*. Madrid. España. Paraninfo.

Fuster, R. y Giménez, I. (1995). *Variable compleja y ecuaciones diferenciales*. Barcelona. España. Editorial Reverté, S.A.

Lang, S. (1985). *Complex Analysis*. New York. E.U.A. Springer-Verlag.

Markushevich, A. (1970). Teoría de las funciones analíticas. Tomo I. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Rivet, R. (1998). *Les fonctions d'une variable complexe*. Paris. Francia. Diderot Editores.

Spiegel, M.R. (1991). *Variable compleja*. México D.F. México. McGraw-Hill/ Interamericana de México, S.A.

CAPÍTULO 4

Series

José Luis Vicente

¡Che mozo! Sirva un trago más de caña,
yo tomo sin motivo y sin razón;
no lo hago por amor que es vieja maña,
tampoco pa'engañar al corazón.
No tengo un mal recuerdo que me aturda,
no tengo que olvidar una traición,
yo tomo porque sí … ¡de puro curda!
Pa'mi es siempre buena la ocasión.

C.Olmedo, A.Aznar, DE PURO CURDA.

4.1 Series

Si la serie de potencias $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k$ converge en z_1

entonces converge absolutamente parara todo z tal que $|z| < |z_1|$

Como $\lim_{k\to\infty} a_k\, z^k = 0,\ \exists M > 0 \,/\, |a_k\, z^k| < M, \forall k\ \therefore |a_k\, z^k| = \left| a_k\, z_1^k \left(\frac{z}{z_1}\right)^k \right| = |a_k\, z_1^k| \left|\frac{z}{z_1}\right|^k < M\, r^k$

donde $r = \left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$, como la serie $\sum_{k=0}^{n-1} M\, r^k$ converge entonces $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k\, z^k|$ converge y

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k$ también converge

¿Cuál es el z_1 más alejado del origen para el cual $S_n(z_1)$ todavía converge?

Al mayor círculo alrededor del origen para el cual la serie de potencias $S_n(z) = \sum a_n\, z^n$ converge en cada punto de su interior, se lo llama círculo de convergencia de la serie, y a su radio R, radio de convergencia. Es decir que si R es el radio de convergencia de la serie, entonces $R \geq 0$, y si r es tal que $0 < r < R$, entonces la serie converge para $|z| < r$.

¿Qué tipo de convergencia es?

Las series de potencias $S_n(z) = \sum a_n\, z^n$ convergen uniformemente para todos los z dentro y sobre cualquier circunferencia interior al círculo de convergencia, pues si z_0 es tal que $|z_0| < R$, y el círculo $|z - z_0| \leq r$ es interior al círculo de convergencia, entonces $|z_0| + r < R$. De manera que se puede tomar un z_1 tal que $|z_0| + r < |z_1| < R$, entonces si z es tal que $|z - z_0| < r$ resulta $|z| = |z_0 + z - z_0| \leq |z_0| + |z - z_0| < |z_0| + r < |z_1|$,

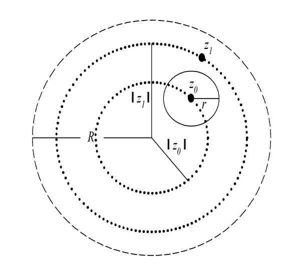


Figura 4.1 *Dentro del disco de convergencia, para cualquier disco centrado en z_0 y radio r, siempre es posible encontrar un punto z_1 cuyo modulo sea mayor al modulo de z_0 mas r.*

y como la serie converge absolutamente para z_1, es decir $\sum |a_k z_1^k|$ converge, el resto tiende a cero, o sea

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N = N(\varepsilon) \ / \ n \geq N \ \Rightarrow \ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k z_1^k| < \varepsilon$, pero si $|z| < |z_1|$ resulta $|a_k z^k| < |a_k z_1^k|$ entonces $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k z^k| < \varepsilon$, para todo z o sea $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|$ converge, entonces $\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ converge.

La serie de potencias $S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es continua para todos los puntos dentro y sobre cualquier circunferencia interior al círculo de convergencia.

Pues si z_0 cumple $|z_0| < R$, y r_1 es tal que el círculo $|z - z_0| < r_1$ queda dentro del círculo de convergencia (es decir que $r_1 < R - |z_0|$), por lo que se acaba de probar podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$, tal que si $n \geq N$ entonces $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, para todo z tal que $|z - z_0| < r_1$. Por otra parte $S_n(z)$ es un polinomio, por lo tanto es continuo en todo el plano, en particular en z_0, de manera que para todo $\varepsilon > 0$,existe $r_2 > 0$, tal que si $|z - z_0| < r_2$ entonces $|S_n(z) - S_n(z_0)| < \varepsilon$. así si se toma r = mín (r_1, r_2) podemos escribir ahora que si $|z - z_0| < r$ entonces $|S(z) - S(z_0)| = |(S(z) - S_n(z)) + (S_n(z) - S_n(z_0)) + (S_n(z_0) - S(z_0))| < 3\varepsilon$. Ver Knopp (1990).

4.2 Integración y diferenciación

Si γ es una curva interior al círculo de convergencia de

$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ y g es una función continua sobre γ,

entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, g(z) \, z^k$ es integrable sobre γ y vale $\int_{\gamma} g(z) \, S(z) \, dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\gamma} g(z) \, z^k dz$

pues como $S(z)$ y $S_n(z)$ son continuas sobre γ, $g(z) \, R_n(z) = g(z) \, S(z) - g(z) \, S_n(z)$ es integrable sobre γ, pues γ está dentro del círculo de convergencia, y para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$, tal que si

$n \geq N$ entonces $|R_n(z)| < \varepsilon$. Si, por otra parte $|g(z)| \leq M$ sobre γ (por ser continua), y además es $L_\gamma = \int |z'(t)|\, dt$ (longitud de la curva), resulta que

$\left|\int_\gamma g(z)\ R_N(z)\ dz\right| \leq M\, L_\gamma\ \varepsilon$ que puede hacerse tan pequeño como se quiera.

4.2.1 Nota: Si se toma $g(z) = 1$, y como γ pude ser cualquier curva simple cerrada interior al círculo de convergencia, se tiene $\oint_\gamma S(z)\ dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \oint_\gamma z^k\ dz = 0$, y por el teorema de Morera, $S(z)$ es analítica en el círculo de convergencia.

4.2.2 Ejemplo:

Para $|z| < 1$, vale $\dfrac{1}{1-z} = S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $S'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$,

y como $S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k-1}$, tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k-1} = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

Si en el teorema anterior, en cada z se toma una curva simple cerrada γ interior al círculo de convergencia, que contenga a z en su interior, entonces como la función $g(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{1}{(\zeta - z)^2}$

es continua sobre γ, se cumple $\dfrac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_k}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{\zeta^k}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, z^{k-1}$.

En otras palabras $S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, z^{k-1}$

¿Qué pasa con la situación inversa?

Es decir si f es analítica en z_0 ¿Puede escribirse $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ en algún entorno de z_0

En caso afirmativo ¿Cuánto valen los a_k? ¿Cómo se relacionan con f? Ver Makushevich (1970)

4.3 Series de Taylor

Recordamos que la fórmula de Cauchy decía $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$

4.3.1 Teorema: Si f es analítica en todo punto dentro de una circunferencia γ_0 de centro z_0 y radio r_0, entonces en cada punto z dentro de γ_0 se cumple

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ (z - z_0)^k \quad \text{donde} \quad a_k = \frac{f^k(z_0)}{k!}$$

Es decir la serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < r_0$

Sea z interior a γ_0, entonces $|z - z_0| = r < r_0$.

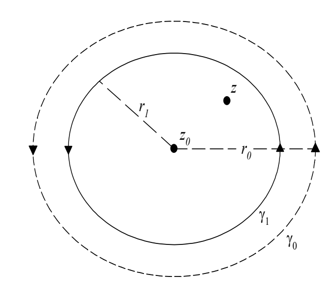


Figura 4.2 *El punto z es interior a la curva □□ de radio r_1, que a su vez es interior a la curva □□□ de radio r_0.*

Si r_1 es tal que $r < r_1 < r_0$ y γ_1 la circunferencia con centro z_0 y radio r_1, de acuerdo a la fórmula de Cauchy, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)}\frac{1}{\left[1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right]}$$, recordando que

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 1 \text{ como } \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{r}{r_1} < 1$$ resulta entonces que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)}\left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^2} + \ldots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(\zeta - z_0)^{n-1}}\right] + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)}$$ y queda

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta + \frac{(z - z_0)}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta + \ldots + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n}\, d\zeta + R_n(z)$$

donde $R_n(z) = \dfrac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)}\, d\zeta$ de manera que finalmente queda

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f''(z_0)(z - z_0)^2 + \ldots + f^{(n-1)}(z_0)(z - z_0)^{n-1} + R_n(z)$$

Para acotar $R_n(z)$ debemos considerar que $|\zeta - z| = |\zeta - z_0 - (z - z_0)| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = r_1 - r$, además sabemos que $|f(\zeta)| \leq M$ sobre γ_1, quedando entonces que

$$|R_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi}\frac{M\ 2\pi r_1}{r_1^n(r_1 - r)} = \frac{M r_1}{(r_1 - r)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$, por lo tanto converge.

4.3.2 Ejemplos:

$f(z) = e^z$, como $f^{(k)}(z) = e^z$, es $f^{(k)}(0) = 1 \therefore e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k$

4.4 Series de Laurent

Si γ_1 y γ_2 son dos circunferencias concéntricas con centro en z_0 y radios r_1 y r_2 respectivamente ($r_2 < r_1$) y f es analítica sobre γ_1, sobre γ_2 y toda la corona entre γ_1 y γ_2, entonces en cada punto z dentro de la corona (dominio) f está representada por

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} \qquad \text{donde}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \ \text{y} \ \ b_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} \, d\zeta \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

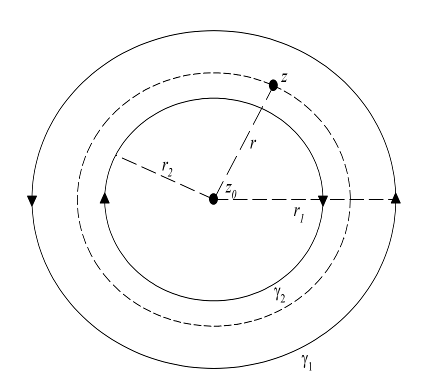


Figura 4.3 *El punto z es interior a la curva γ_1 de radio r_1, que se recorre en sentido anti horario, y es exterior a la curva γ_2 de radio r_2, que se recorre en sentido horario.*

La fórmula de la integral de Cauchy para dominios múltiplemente conexos queda:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, d\zeta$$

La primera es

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}(z - z_0) + \ldots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n}(z - z_0)^{n-1} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)}(z - z_0)^n$$

y la segunda

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)} \frac{1}{\left[1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right]}$$

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(\zeta)\frac{1}{(z - z_0)} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-1}}\frac{1}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n-2}}\frac{1}{(z - z_0)^{n-1}} + \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n(z - \zeta)}$$

Es decir la serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < r_0$

Sea z interior a γ_0, entonces $|z - z_0| = r < r_0$.

Si r_1 es tal que $r < r_1 < r_0$ y γ_1 la circunferencia con centro z_0 y radio r_1, de acuerdo a la fórmula de Cauchy, tenemos

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\zeta-z_0)}\frac{1}{\left[1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]}$$,resulta así que

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+R_n(z)+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}}+Q_n(z)$$

donde $Q_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{(z-z_0)^n}\oint_{\gamma_2}\dfrac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^n}{(\zeta-z)}\,d\zeta$

$|z-\zeta| = |(z-z_0)-(\zeta-z_0)| \geq |z-z_0| - |\zeta-z_0| = r-r_2$, además como $|f(\zeta)| \leq M_2$ sobre γ_2,

queda $|Q_n(z)| \leq \dfrac{r_2^n}{2\pi}\dfrac{M_2\,2\pi r_2}{r^n(r-r_2)}=\dfrac{M\,r_2}{(r-r_2)}\left(\dfrac{r_2}{r}\right)^n \to 0$ cuando $n\to\infty$, por lo tanto converge.

4.5 Ceros de las funciones analíticas. Puntos singulares

Si f es analítica en z_0 entonces existe un disco alrededor de z_0 donde

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ con $a_k=\dfrac{f^k(z_0)}{k!}$. Si $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, diremos que z_0 es un cero de orden m de f. Ver Churchill (1992).

Entonces $f(z)=a_m\,(z-z_0)^m+a_{m+1}\,(z-z_0)^{m+1}+\ldots=(z-z_0)^m\sum_{k=0}^{\infty}a_{m+k}\,(z-z_0)^k=(z-z_0)^m\,g(z)$

donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) = a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$.

Por ser g continua en z_0, debe existir un disco alrededor de z_0, $|z-z_0| < r$ donde $g(z) \neq 0$, pues $|g(z)| = |g(z_0) - [g(z_0) - g(z)]| \geq |g(z_0)| - |g(z_0) - g(z)| = |a_m| - |g(z) - g(z_0)|$, tomando $r = ½\,|a_m|$ queda $|g(z)| \geq |a_m| - ½\,|a_m| = ½\,|a_m| > 0$.

Si f es analítica en z_0 y $f(z_0) = 0$, entonces existe un entorno reducido alrededor de z_0 donde f no se anula, a menos que sea la función idénticamente nula sobre todo el dominio Ω.

¿Qué pasa cuando f deja de ser analítica en z_0?

4.5.1 Puntos singulares

Para $z_0 = 0$, consideramos las funciones:

1) $f(z)=\begin{cases} z & \text{si } |z|>1 \\ z^* & \text{si } |z|\leq 1\end{cases}$, 2) $f(z) = Log\,z$, 3) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$

Ninguna es analítica en z_0, pero tienen características distintas: el caso (1) no es analítica en todo un entorno alrededor de z_0, este tipo de casos no nos interesarán, porque no guardan ninguna relación con las funciones analíticas. en los caos (2) y (3) vemos que todo entorno de z_0 siempre contiene puntos donde f es analítica, es decir nos podemos acercar a z_0 tanto como queramos a través de puntos donde la función es analítica. A este tipo de puntos se los denomina puntos singulares de la función f. La diferencia es que en el caso (2) todo entorno de z_0, aparte de z_0, también existen puntos donde f no es analítica (todo el semieje real negativo).

En cambio en el caso (3) existen al menos algún entorno donde z_0 es el único punto donde f no es analítica, o en otras palabras podemos encontrar un entorno reducido de z_0 (o disco perforado con centro en z_0), que podría ser el conjunto de z tales que $0 < |z - z_0| < r$, donde f es analítica. A este tipo de puntos se los denomina puntos singulares aislados de f.

4.5.2 Singularidades evitables, polos y singularidades esenciales. Ver Cartan (1968).

¿Cómo se comporta una función f en las proximidades de un punto singular aislado?

Si z_0 es un puno singular aislado de f, debe existir un número real $r > 0$, tal que si $0 < |z - z_0| < r$ entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

¿Cómo será f cerca de z_0? ¿Qué casos se pueden dar? ¿Cómo son los b_k en cada caso?

En realidad se pueden dar tres casos, que podemos visualizar a través de distintos ejemplos:

1) $f(z) = \dfrac{sen\, z}{z}, z_0 = 0,$ vimos que $sen\, z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ...$

por tanto $\dfrac{sen\, z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} + ...$, entonces $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{sen\, z}{z} = 1$ es decir que existe $\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z)$ y es finito

Se puede definir en todo el disco $|z - z_0| < r$, $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } 0 < |z - z_0| < r \\ \displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

$\tilde{f}(z)$ es analítica en $|z - z_0| < r$ es decir $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ (z - z_0)^k$, y coincide con f para $0 < |z - z_0| < r$

En otras palabras $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ (z - z_0)^k$ para $0 < |z - z_0| < r$ es decir que $b_k = 0$ para todo k.

En este caso se dice que z_0 es una singularidad evitable de f.

2) $f(z) = \dfrac{cos\, z}{z^2}, z_0 = 0,$ en este caso $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{cos\, z}{z^2} = \infty$. Existe el límite y es ∞

Estudiandola inversa $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{z^2}{cos\, z}$ veamos que pasa cerca de $z_0 = 0,$ $\displaystyle\lim_{z \to 0} g(z) = 0$

Como f es analítica para $0 < |z - z_0| < r$ existe un $r_1 > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| < r_1$

Se puede definir en todo el disco $|z - z_0| < r_1$, $\tilde{g}(z) = \begin{cases} 1/f(z) & \text{si } 0 < |z - z_0| < r_1 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

$\tilde{g}(z)$ es analítica en $|z - z_0| < r_1$, no es nula o sea z_0 es cero de orden m, $\tilde{g}(z) = (z - z_0)^m h(z)$,

$h(z) \neq 0$ si $|z - z_0| < r_2$ y para $0 < |z - z_0| < r_2$ se cumple $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$

con $\phi(z)$ analítica en todo el disco y $\phi(z_0) \neq 0$. Escribiendo $\phi(z) = \phi_0 + \phi_1 (z - z_0) + \phi_2 (z - z_0)^2 + ...$

queda $f(z)=\frac{\phi_0}{(z-z_0)^m}+\frac{\phi_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{\phi_{m-1}}{(z-z_0)}+\phi_m+\phi_{m+1}(z-z_0)+\phi_{m+2}(z-z_0)^2+\ldots$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_{m+k}(z-z_0)^k+\frac{\phi_{m-1}}{(z-z_0)}+\frac{\phi_{m-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{\phi_0}{(z-z_0)^m} \quad \text{con} \quad \phi_0=\phi(z_0)\neq 0$$

con $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$ con $b_m\neq 0$

Existe un número finito de $b_k \neq 0$, pues $b_m \neq 0$ y $b_k = 0$ si $k > m$.

En este caso se dice que z_0 es un polo de orden $\boldsymbol{m}$ de f.

3) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$, al tomar $z_n=\frac{1}{i\,n\,\pi}$ se tiene $\lim_{n\to\infty} z_n=0$ pero $f(z_n)=e^{i\,n\,\pi}=(-1)^n$

No existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ¿Cómo son los b_k? Deben ser infinitos, sino sería un polo.

En el ejemplo $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{z^k}$ con $b_k\neq\frac{1}{k!}$

no necesariamente todos los $b_k \neq 0$, en $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}+\ldots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^{2k}}$

Existe infinitos $b_k \neq 0.$ En estos casos se dice que z_0 es una singularidad esencial de f.

4.5.3 Un caso particular

$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ donde $f_1(z)$ y $f_2(z)$ analíticas en z_0 por tanto z_0 debe ser cero del denominador $f_2(z)$

eventualmete pude ser cero del numerador $f_1(z)$, o sea $f_1(z)=(z-z_0)^{m_1}\,g_1(z)$ y $f_2(z)=(z-z_0)^{m_2}\,g_2(z)$

donde $g_1(z)$ y $g_2(z)$ no se anulan en un disco alrededor de z_0 entonces

$$\begin{cases} \text{si } m_1\geq m_2 & \text{es una singularidad evitable} \\ \text{si } m_1<m_2 & \text{es un polo de orden } m=m_2-m_1 \end{cases}$$

Si z_0 es una singularidad aislada de f, existe un número $r > 0$, tal que si $0<|z-z_0|<r$ entonces

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\ (z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

donde $b_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\,d\zeta$, $k=1,2,3,\ldots$ para $k=1$ queda $b_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$, a b_1 se

lo llama residuo de f en z_0. ¿Cómo se puede calcular el residuo?

1) Si z_0 es una singularidad evitable, entonces $b_k = 0$ para todo k, entonces $b_1 = 0$.

2) Si z_0 es un polo de orden m tenemos que

$$\phi(z)=(z-z_0)^m f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{m+k}+b_1(z-z_0)^m+b_2(z-z_0)^{m-1}+\ldots+b_m$$

de manera que derivando queda finalmente $b_1=\lim_{z\to z_0}\frac{\phi^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}$

3) Si z_0 es una singularidad esencial tenemos que obtener el valor de b_1 a partir del desarrollo de Laurent alrededor de dicho punto.

4.5.4 Ejemplo: Obtener los residuos de todas las singularidades aisladas de $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$

Se tiene $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)} = \dfrac{e^{iz}}{z(z-i)^2(z+i)^2}$ es un cociente de funciones analíticas

1) Buscar los ceros del denominador $z_0 = 0,\ z_1 = i,\ z_2 = -i$

2) Analizar cada caso

a) $z_0 = 0$

Es un cero de orden 1 del denominador ($m_2 = 1$), ¿es cero del numerador? $f_1(0) = e^0 = 1 \neq 0$ o sea ($m_1 = 0$),

Por lo tanto es un polo de orden 1, y entonces $\phi(z) = (z - z_0) f(z) = z f(z) = e^{iz}(z^2+1)^{-2}$, es entonces $b_1^{(0)} = \phi(0) = 1.$

b) $z_1 = i$

Es un cero de orden 2 del denominador ($m_2 = 2$), ¿es cero del numerador? $f_1(i) = e^i \neq 0$ entonces ($m_1 = 0$).

Por lo tanto es un polo de orden 2, y entonces $\phi(z) = (z - z_1)^2 f(z) = (z-i)^2 f(z) = e^{iz} z^{-1} (z+i)^{-2}$, o sea $\phi'(z) = (i - z^{-1} - 2(z+i)^{-1})\, \phi(z)$ por lo tanto $\phi'(i) = (i - i^{-1} - 2(i+i)^{-1})\, \phi(i) = 3\, i\, \phi(i)$,

y como $\phi(i) = -e^{-1}(4i)^{-1}$ finalmente queda $b_1^{(1)} = -\frac{3}{4} e^{-1}$. Ver Feyel (1980), Spiegel (1991).

4.5.5 Teorema de los residuos:

Si γ es una curva simple cerrada dentro de la cual f es analítica excepto un número finito de puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots z_n$ interiores a γ, $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, \ldots b_1^{(n)}$ son los respectivos residuos de f en dichas singularidades, entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, [b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + \ldots + b_1^{(n)}]$$

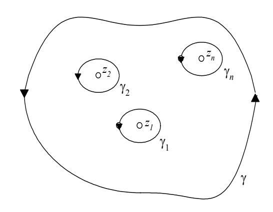


***Figura 4.4 Figura 4.4** Es posible encontrar curvas γ_t de radios r_i, que encierren una sola singularidad aislada z_i, sean disjuntas a su vez interiores a γ.*

Esto se puede probar tomando n circunferencias γ_1, γ_2, ... γ_n, centradas en $z_1, z_2, \ldots z_n$, respectivamente de manera que sean interiores a γ y a su vez disjuntas entre ellas. Por ser puntos singulares aislados sabemos que vale la relación $\int_{\gamma j} f(z)\, dz = 2\pi i\, b_1^{(j)}$ para $j = 1, 2\ldots, n$ con tomar las circunferencia suficientemente pequeñas.

Resulta entonces que si ahora consideramos la curva $\Gamma = \gamma \cup (-\gamma_1) \cup (-\gamma_1) \cup ... \cup (-\gamma_n)$, vemos que es el borde de una región donde f es analítica, por lo tanto tenemos que: $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$, y por lo tanto:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz - 2\pi i\, [b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + ... + b_1^{(n)}] = 0$$

4.5.6 Ejemplo:

Calcular $\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\, dz$ donde γ es la circunferencia con centro en i y radio $3/2$, recorrida en sentido anti horario

Vimos que las singularidades aisladas de la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2(z+i)^2}$ son

$z_0 = 0,\ z_1 = i,\ z_2 = -i$, de las cuales solo z_0 y z_1 están dentro de la curva γ, y los respectivos residuos son respectivamente $b_1^{(0)} = 1$ y $b_1^{(1)} = -\frac{3}{4} e^{-1}$.

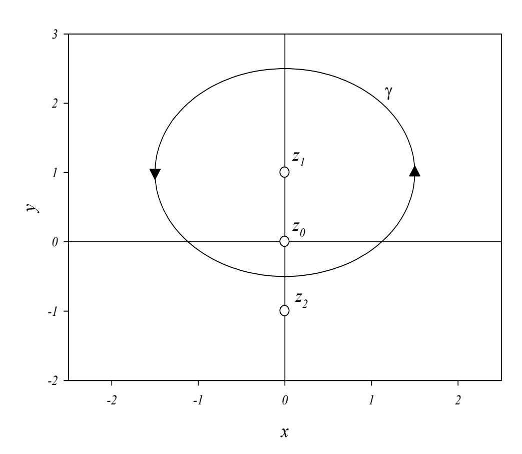


Figura 4.5 *La figura muestra la curva γ, y las tres singularidades aisladas de $f(z)$.*

Por lo tanto:

$$\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi i\,(b_1^{(0)} + b_1^{(1)}) = 2\pi i \left(1 - \frac{3}{4e}\right)$$

4.6 Aplicaciones al cálculo de integrales en el campo real

4.6.1 Cálculo de integrales que contienen *sen t* y *cos t*, con $0 \le t \le 2\pi$

Se considera una integral de la forma $I = \int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$,

en donde $F(\frac{1}{2}(z^*+z), \frac{i}{2}(z^*-z))$, no tiene puntos singulares sobre la circunferencia $|z| = 1$.

Solución: Haciendo $z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$,es decir $\operatorname{sen} t = \frac{i}{2}(z^{-1} - z), \cos z = \frac{1}{2}(z^{-1} + z)$, $dz = i z\, dt$

Entonces $I = \int_\gamma F(\tfrac{i}{2}(z^{-1} - z), \tfrac{1}{2}(z^{-1} + z)) \frac{dz}{i z} = \int_\gamma f(z)\, dz$, donde γ es la curva $|z| = 1$.

Basta calcular los residuos de $f(z) = F(\tfrac{i}{2}(z^{-1} - z), \tfrac{1}{2}(z^{-1} + z)) \frac{1}{i z}$ para todos los polos dentro de la circunferencia $|z| = 1$.

4.6.2 Cálculo de integrales impropias con $-\infty \leq x \leq +\infty$

4.6.2.1 Observación 1:

La integral impropia $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \int_a^b f(x)\, dx$, es un límite doble.

Mientras que $I_2 = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\, dx$, es un límite simple, que no tiene porqué coincidir con I_1.

A I_2 se lo llama valor principal de la integral impropia y se escribe $I_2 = VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Obviamente puede existir el valor principal, sin que exista la integral impropia. Pero si existe la integral impropia, la misma debe coincidir con el valor principal. A partir de ahora solo vamos a considerar el valor principal de las integrales.

4.6.2.2 Observación 2:

Dadas $f(z)$ tal que $\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$ y la curva $\gamma_R : \begin{cases} z = R\, e^{i\,t} \\ 0 \leq t \leq \alpha \end{cases}$, y el máximo de $|f|$ sobre γ_R, está en z_R. Entonces $\left| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq |f(z_R)|\, R\, \alpha = |f(z_R)|\, |z_R|\, \alpha = |z_R\, f(z_R)|\, \alpha$, de manera que

$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0$

Dadas $f(z)$ tal que $\lim_{z\to 0} z\, f(z) = 0$ y la curva $\gamma_r : \begin{cases} z = r\, e^{i\,t} \\ 0 \leq t \leq \alpha \end{cases}$, y el máximo de $|f|$ sobre γ_r, está en z_r. Entonces $\left| \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \right| \leq |f(z_r)|\, r\, \alpha = |f(z_r)|\, |z_r|\, \alpha = |z_r\, f(z_r)|\, \alpha$, de manera que

$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 0$

4.6.3 Integrales de $f(x)$ entre $-\infty \leq x \leq +\infty$, cuando $f(z)$ no tiene puntos singulares sobre el eje real

Si f es una función analítica para $Re(z) \geq 0$ excepto un número finito de puntos singulares aislados $z_1, z_2, \ldots z_n$ tal que $Re(z_j) > 0$, $1 \leq j \leq n$, y $b_1^{(1)}$, donde $b_1^{(2)}, \ldots b_1^{(n)}$ son los respectivos residuos de f en dichas singularidades, y $\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left[\, b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + \ldots + b_1^{(n)} \,\right]$$

Demostración:

Considerando las curvas

$\gamma_x : \begin{cases} z = x \\ -R \le x \le +R \end{cases}$, $\gamma_R : \begin{cases} z = R\,e^{i\,t} \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$ y $\Gamma = \gamma_x \cup \gamma_R$, tomando R suficientemente grande, como para que incluya todos los puntos singulares de $f(z)$ en su interior, por una parte tenemos que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_x} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \quad \text{además} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0,$$

y por otra parte de acuerdo al teorema de los residuos $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left[\, b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + \ldots + b_1^{(n)} \,\right]$, con tomar R suficientemente grande, con lo que queda demostrada la afirmación previa.

¿Qué ocurre si ahora $f(z)$ tiene singularidades sobre el eje real? Ver Rivet (1998).

4.6.4 Integrales de $f(x)$ entre $-\infty \le x \le +\infty$, si $f(z)$ tiene puntos singulares sobre el eje real

Consideremos una función $f(z)$ con las mismas condiciones que en el caso anterior, pero además tiene, por ejemplo, un polo simple en $z_0 = 0$.

Es decir que ahora en un entorno de $z_0 = 0$ se cumple $f(z) = b_1^{(0)}/z + h(z)$, donde $h(z)$ es analítica.

Entonces consideramos las curvas

$\gamma_{x-} : \begin{cases} z = x \\ -R \le x \le -r \end{cases}$, $\gamma_r : \begin{cases} z = r\,e^{i\,t} \\ \text{va de } t = \pi \text{ a } t = 0 \end{cases}$, $\gamma_{x+} : \begin{cases} z = x \\ +r \le x \le +R \end{cases}$, y $\gamma_R : \begin{cases} z = R\,e^{i\,t} \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

Vemos que si r es suficientemente pequeño, resulta:

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} \frac{b_1^{(0)}}{z}\,dz + \int_{\gamma_r} h(z)\,dz = -\pi i\, b_1^{(0)} + \int_{\gamma_r} h(z)\,dz \quad \text{con} \quad \lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} h(z)\,dz = 0$$

Si ahora tomamos $\Gamma = \gamma_{x+} \cup \gamma_r \cup \gamma_R \cup \gamma_{x-}$, tenemos

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{r}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

, tomando $R \to \infty$ y $r \to 0$ queda

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{2} b_1^{(0)} + b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + \ldots + b_1^{(n)} \right]$$

4.6.5 Cálculo de integrales impropias de la forma $\int_0^{+\infty} \frac{g(x)}{x^\alpha}\,dx$ si $0 \le x \le +\infty$, $0 < \alpha < 1$, y $g(z)$ es una función analítica, sin polos sobre el semieje $x \ge 0$ que cumple $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Tomando $0 \le \arg z \le 2\pi$ y la curva Γ dada por $\Gamma = \gamma_{x+} \cup \gamma_R \cup \gamma_{x-} \cup \gamma_r$, donde

$\gamma_{x+} : \begin{cases} z = x + i\,\varepsilon \\ +r \le x \le +R \end{cases}$, $\gamma_R : \begin{cases} z = R\,e^{i\,t} \\ \delta \le t \le 2\pi - \delta \end{cases}$, $\gamma_{x-} : \begin{cases} z = x - i\,\varepsilon \\ \text{de } x = +R \text{ a } x = +r \end{cases}$, $\gamma_r : \begin{cases} z = r\,e^{i\,t} \\ \text{de } t = 2\pi - \delta \text{ a } t = \delta \end{cases}$,

y entonces llamando $f(z) = \frac{g(x)}{x^{\alpha}}$, y tomando $\lim_{\varepsilon \to 0}$ y $\lim_{\delta \to 0}$, queda

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \left(1 - e^{-2\pi i \alpha} \right) \int_r^R \frac{g(x)}{x^{\alpha}}\,dx = 2\pi i \left[b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + \ldots + b_1^{(n)} \right]$$

Por otra parte se cumple $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$, es decir que finalmente

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(x)}{x^{\alpha}}\,dx = 2\pi i \left[b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + \ldots + b_1^{(n)} \right] \left(1 - e^{-2\pi i \alpha} \right)^{-1}$$

Referencias

Cartan, H. (1968). *Teoría elemental de funciones analíticas de una a varias variables complejas*. Madrid. España. Selecciones Científicas.

Churchill, R.V. y Brown, J.W. (1992). *Variable compleja y aplicaciones*. Madrid. España. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

Feyel, D. y Pradelle A. (1980). *Ejercicios sobre las funciones analíticas*. Madrid. España. Paraninfo.

Knopp K. (1990). *Theory and applications of infinite series*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Markushevich, A. (1970). Teoría de las funciones analíticas. Tomo I. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Rivet, R. (1998). *Les fonctions d'une variable complexe*. Paris. Francia. Diderot Editores.

Spiegel, M.R. (1991). *Variable compleja*. México D.F. México. McGraw-Hill/ Interamericana de México, S.A.

CAPÍTULO 5
Ecuaciones diferenciales ordinarias

José Luis Vicente

Tus ojos son oscuros como el olvido
tus labios apretados como el rencor
tus manos dos palomas que sienten frío,
tus venas tienen sangre de bandoneón.
Tus tangos son criaturas abandonadas
que cruzan sobre el barro del callejón,
cuando todas las puertas están cerradas
y ladran los fantasmas de la canción

L.Demare, H.Manzi, MALENA.

5.1 Ecuación diferencial

Una ecuación diferencial (ED) es una expresión algebraica que vincula la(s) derivada(s) de una función incógnita con dicha función y, eventualmente con la(s) variable(s) de la(s) que dicha función depende. Las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante en ingeniería, física, economía y otras disciplinas.

Las ED aparecen en muchos campos científicos y tecnológicos, siempre que se postulen o se conozcan relaciones cuantitativas entre cierta magnitud (modelada mediante una función) que varía en forma continua y sus cambios instantáneos (expresados como derivadas). Esto se encuentra bien ejemplificado en la mecánica clásica, donde le movimiento de una partícula es descripto por la posición y velocidad en función del tiempo. Las leyes de Newton permiten relacionar posición, velocidad y aceleración y las fuerzas actuantes sobre la partícula y establecer dicha relación como una ED para la posición como función desconocida del tiempo. En muchos casos esta ED puede resolverse en forma explícita, dando la ley de movimiento.

En matemática se estudian las ED desde distintos punto de vista, la mayoría trata sobre sus soluciones, es decir funciones suficientemente derivables que reemplazadas en la ecuación la verifican. Solo las ED más simples admiten soluciones dada en forma explícita. Muchas propiedades de las soluciones de una ED pueden determinarse sin necesidad de encontrar su forma exacta. Si no se dispone de una formula explícita para la solución, la misma puede aproximarse numéricamente empleando computadoras. La teoría de sistemas dinámicos pone el acento en el análisis cuantitativo de los sistemas descriptos mediante ED, mientras que los métodos numéricos han permitido determinar soluciones con cierto grado de exactitud.

El estudio de las ED abarca campos de las matemáticas puras, aplicadas, física e ingeniería. Todas estas disciplinas tratan sobre las propiedades de distintos tipos de ED. La matemática pura se centra en la existencia y unicidad de las soluciones, mientras que la matemática aplicada enfatiza la justificación rigurosa de los métodos para aproximar soluciones. Las ED juegan un papel importante en el modelado de prácticamente todos los procesos físicos, técnicos, o biológicos, desde el movimiento de los cuerpos celestes o el diseño de un puente, hasta las interacciones entre neuronas. Las ED que se emplean para resolver problemas de la vida real pueden no necesariamente ser directamente resolubles, es decir, pueden no tener soluciones en forma cerrada. En su lugar, se pueden aproximar las soluciones empleando métodos numéricos.

Los matemáticos también estudian soluciones débiles (relacionadas con la derivación débil), que son soluciones no diferenciables en todo punto. Esta extensión a menudo son necesarias cuando no existen soluciones, y también proveen soluciones con propiedades físicamente razonables, tales como son la presencia de saltos en ecuaciones de tipo hiperbólico.

Es estudio de la estabilidad de las soluciones de las ED se conoce como teoría de estabilidad.

5.1.1 Tipos de ecuaciones diferenciales

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ED en que la función incógnita depende de una sola variable.
- Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una ED en que la función incógnita depende de más de una variable y de sus derivadas parciales.
- Una ecuación diferencial algebraica (EDA) es una ED que comprende términos diferenciales y algebraicos, dados en forma implícita.

Cada una de estas categorías a su vez se divide en subcategorías lineales y no lineales. Una ED es lineal si la variable dependiente y todas sus derivadas aparecen a la potencia uno y no existen productos de funciones de la variable dependiente. El resto son EDs no lineales.

De manera que si $y^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de la función y, entonces la ecuación

$$\alpha_0(x)\, y + \alpha_1(x)\, y' + \ldots + \alpha_n(x)\, y^{(n)} + \beta(x) = 0$$

es lineal, mientras que la ecuación

$$y = x\, y' + (y')^2$$

es no lineal. Las soluciones de una ecuación lineal en que aparecen solo la función desconocida y sus derivadas ($\beta(x) = 0$) se llaman ecuaciones lineales homogéneas y pueden sumarse o multiplicarse por constantes arbitrarias para obtener soluciones adicionales de la misma ecuación, pero no existe algo similar para las soluciones de las ecuaciones no lineales, excepto cuando las mismas presentan simetrías. Frecuentemente se aproximan ecuaciones no lineales mediante ecuaciones lineales, pero dichas aproximaciones son válidas bajo condiciones muy estrictas.

Otra característica importante de una ecuación diferencial es su orden, que es el orden de la mayor derivada (de la variable dependiente) que aparece en la ecuación. Por ejemplo una ED

de primer orden solo contiene derivadas primeras, como es el caso del último ejemplo, mientras que el anterior era de orden n (si $\alpha_0(x) \neq 0$).

5.1.2 Algunas ecuaciones diferenciales muy conocidas

- Ecuaciones de Cauchy-Riemann del análisis complejo
- Ley de enfriamiento de Newton
- Decaimiento radiactivo de la física nuclear
- Segunda ley de Newton de la dinámica
- Ecuación de las ondas
- Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo
- Ecuación de Laplace para definir funciones armónicas
- Ecuación de Poisson
- Ecuación del calor en termodinámica
- Ecuación de Schroedinger de la mecánica cuántica

5.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias

5.2.1 Un ejemplo simple es la segunda ley de Newton que da la EDO

$$m\, d^2y/dt^2 = F(y(t))$$

para el movimiento de una partícula de masa m. En general la fuerza F depende de la posición $y(t)$ y del tiempo t, de manera que la función desconocida $y(t)$ aparece en los dos lados de la ED, lo que se especifica poniendo $F(y(t))$.

Se han realizado muchos estudios referidos a la solución de EDO. En el caso que la ecuación es lineal, la misma puede resolverse por métodos analíticos. Desafortunadamente una gran cantidad de ED interesantes no son lineales y, salvo muy pocas excepciones, no pueden resolverse en forma exacta. Las soluciones aproximadas se obtienen usando métodos computacionales.

5.2.2 Definiciones

Si llamamos $y(x)$ a la función incógnita, a valores reales, definida sobre algún subconjunto de los números reales, y si $y^{(k)}$ es la k – ésima derivada de y, entonces la expresión

$$g(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(forma general o implícita)}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad \text{(forma canónica, normal o explícita)}$$

Se la llama ecuación diferencial (ED) ordinaria de orden n. Mientras que un sistema

$$y_1^{(n)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)})$$

$$y_2^{(n)} = f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m^{(n)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n-1)})$$

se lo denomina sistema de m ecuaciones diferenciales de orden n.

Se llama autónoma a la ecuación diferencial que no depende de x, es decir de la forma

$$y^{(n)} = f(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Una ED se llama lineal si f puede escribirse como una combinación lineal de y, y sus derivadas

$$y^{(n)} = a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \ldots + a_{n-1}(x)\, y^{(n)} + b(x)$$

cuando los $a_i(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas de x. La función $b(x)$ se denomina término fuente; si $b(x) = 0$ la ED lineal se llama homogénea, sino se llama no homogénea o inhomomgénea.

5.3 Soluciones

5.3.1 Dada la EDO

$$g(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

una función $\phi(x)$, a valores reales definida en algún subconjunto de los números reales se llama solución o curva integral de la EDO anterior, si ϕ es n veces diferenciable, y

$$g(x, \phi, \phi', \ldots, \phi^{(n)}) = 0$$

Dadas dos soluciones $\phi(x)$ definida en un conjunto Ω_1 de números reales y $\psi(x)$ definida en otro sub conjunto Ω_2, si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, y $\psi(x) = \phi(x)$ en Ω_1 diremos que ψ es una extensión de ϕ. Una solución que no admite más extensiones se llama solución global.

5.3.2 Ejemplo: Sea $y(t)$ la posición de una partícula de masa m que cae sujeta a la fuerza de la gravedad (a una distancia del piso, $y = 0$, tal que puede suponerse que dicha fuerza es constante).

Por la segunda ley de Newton resulta: $m\, d^2y/dt^2 = -\, m\, g$, por lo tanto $d^2y/dt^2 = -\, g$, EDO de 2^o orden

Llamando $v = dy/dt$ la EDO de 2^o orden se puede descomponer en dos EDO de 1^{er} órden:

$$dy/dt = v$$

$$dv/dt = -\, g$$

Resulta pues que $\int dv = -\int g\, dt$, $v = -\, g\, t + c_1 = v(t, c_1)$

$$\int dy = \int v\, dt, \quad y = -\, \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + c_1\, t + c_2 = y(t, c_1, c_2)$$

Otros ejemplos se pueden ver en Kiseliov (1979), Sokolnicoff (1947) y Spiegel (1986).

5.3.3 Observación: Puede existir una familia de soluciones $y = \phi(x, c_1, \ldots, c_n)$ definida a partir de “parámetros” $(c_1, \ldots, c_n)$ que variarán en ciertos subconjuntos de números reales; inclusive sus relaciones podrían estar dadas en forma implícita como $\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$.

Recíprocamente dada una familia de funciones (suficientemente derivables) definida a través de $(c_1, \ldots, c_n)$ es posible encontrar una EDO de orden n de la que son solución.

5.3.4 Ejemplo: Dada la familia $y = c_1\, x - c_1^2$ resulta $dy/dx = y' = c_1 \quad \therefore \quad c_1 = y'$

Reemplazando en la expresión de y para eliminar el parámetro c_1 queda $(y')^2 - x\, y' + y = 0$

Vemos que hay un solo parámetro (1^{er} orden) y aparece al cuadrado (2^o grado).

5.3.5 Problema: Cuando la familia de soluciones esta dada en forma explícita $y = f(x, c_1, \ldots, c_n)$ por sucesivas derivaciones, los parámetros se pueden ir eliminando y así obtener la correspondiente EDO. Si la familia estuviera dada en forma implícita como $\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$, ¿de qué manera deberían eliminarse dichos parámetros?.

Una solución general de una ecuación de orden n es una solución que contiene n variables arbitrarias, que corresponden a n constantes de integración. Una solución particular se obtiene de la solución general dándole valores particulares a las constantes, a menudo se eligen de manera que cumplan las "condiciones iniciales o de contorno".

5.3.6 Observación: Si se conoce la solución general y se impone un número de restricciones (a lo sumo igual al orden de la EDO) indirectamente se está fijando el valor de los parámetros de tal solución. Es decir se esta pasando de la solución general a una particular.

¿Todas las soluciones de una EDO surgen de la solución general?

5.3.7 Ejemplo: $(y')^2 - x\,y' + y = 0$ escribiendo esta expresión como $(\tfrac{1}{2}x - y')^2 = \tfrac{1}{4}x^2 - y$ queda

$y = \phi(x, c_1) = c_1 x - c_1^2$ familia de soluciones

pero vemos que $\tfrac{1}{4}x^2 - y \geq 0$ y $\tfrac{1}{4}x^2 - y = 0$ también es solución

En otras palabras $y = \psi(x) = \tfrac{1}{4}x^2$ es solución pero no pertenece a la familia.

Toda solución que no pueden obtenerse de la solución general (no constituye parte de la familia) se denomina solución singular. Resulta interesante estudiar las propiedades de las soluciones singulares. Ver Martin (1957). Otro caso interesante para analizar $y' = y$.

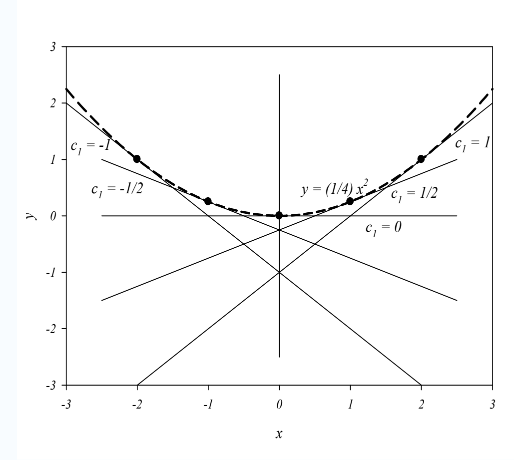


Figura 5.1 *La solución singular □(x) tienen la misma derivada que cada miembro de la familia, dada por la solución general □(x,c_1) en cada punto de □(x).*

5.4 Curvas integrales y campo de direcciones

Si a cada punto de una región del plano se le asocia un vector que pasa por dicho punto, se dice que dichos vectores definen un campo vectorial *(o* campo de direcciones*)* en la región. Un campo de direcciones es continuo (suave) si los vectores que definen dicho campo varían en forma continua (suave) con los puntos que las definen. Ver Marsden (1991).

Una curva γ, que podemos pensarla parametrizada como γ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t),y(t)),\ t_1 \le t \le t_2$, que en cada uno de sus puntos es tangente a un campo de direcciones (campo vectorial) se llama curva integral de dicho campo. El nombre de curva integral proviene del hecho que en ciertos casos tales curvas pueden obtenerse empleando operaciones de integración.

Si $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v_1(\mathbf{r}),\ v_2(\mathbf{r}))$, se tienen las siguientes relaciones: $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$ o sea $x'(t) = v_1(x,y),\ y'(t) = v_2(x,y)$, y asumiendo que $v_1 \neq 0$, la curva γ se puede parametrizar con $x,\ y$ por la regla de la cadena $y'(t) = y'(x)\,x'(t)$, es decir $y'(x) = v_2\,(x,y) / v_1(x,y)$, si se lo asocio a la EDO $y'(x) = f(x,y)$, el campo queda $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1(x,y)\ (1,\ f(x,y))$, o sea $\mathbf{v}$ es paralelo a $(1,\ f(x,y))$, en otras palabras las soluciones de $y'(x) = f(x,y)$ son curvas integrales del campo $(1,\ f(x,y))$. La parte lineal del incremento $d\mathbf{r} = (dx,\ dy) = \mathbf{r}'(t)\ dt$, da $dx = v_1\ dt$, $dy = v_2\ dt$, o sea $v_2(x,y)\ dx - v_1\ (x,y)dy = 0$, es otra forma de escribir la EDO para la curva integral. En otras palabras la expresión

$$p(x,y)\ dx + q(x,y)\ dy = 0,$$

es la ecuación de una curva integral del campo $\mathbf{v}(r)= (q(x,y),\ -p(x,y))$, que a su vez es perpendicular al campo vectorial $\mathbf{n}(r) = (p(x,y),\ q(x,y))$.

La ventaja de la expresión $p(x,y)\ dx + q(x,y)\ dy = 0$, respecto a $y' = f(x,y) = -\ q(x,y) /p(x,y)$, es que en el primer caso no hay que suponer que $q(x,y) = -v_1(x,y) \neq 0$ (prohibición de líneas verticales). De manera que es indistinto escribir $y' = f(x,y)$ a escribir $f(x,y)\ dx - dy = 0$. Ver Arnold (1992).

5.5 Ecuaciones diferenciales exactas

5.5.1 Si en la ecuación diferencial $p(x,y)\ dx + q(x,y)\ dy = 0$, existe una función $s(x,y)$ tal que se cumple $\partial s /\partial x = p$, $\partial s /\partial y = q$, diremos que dicha EDO es exacta. Entonces $p\ dx + q\ dy = ds = 0$, lo cual significa que $s(x,y) = c_1$ es solución general.

¿Qué condiciones deben cumplir p y q para que exista s? ¿Tiene importancia la región $\Omega \subset R^2$ donde debe existir s? ¿Cómo encontrar s?

Si p y q son diferenciables en un abierto, simplemente conexo y $\partial q /\partial x = \partial p /\partial y$ en Ω, entonces tomando un punto $(x_o,y_o) \in \Omega$ y

$$s(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (p\ dx + q\ dy)$$

se puede ver que s está bien definida (independiente del camino) y resulta $p = \partial s/\partial x$, $q = \partial s/\partial y$, de manera que $s(x,y) = c_1$ es solución general. Ver Marsden (1991).

5.5.2 Observación: A veces p y q son derivables pero no se cumple $\partial q /\partial x = \partial p /\partial y$, entonces no se podrá asegurar que exista s. Supongamos que existen las curvas integrales y una función $s(x,y)$ tal que sobre estas curvas se cumpla la relación $ds = \partial s/\partial x\ dx + \partial s/\partial y\ dy = 0$, es decir ∇s será perpendicular a la curva integral en cada punto, pero sabemos que la curva integral es perpendicular al campo $\mathbf{n} = (p,\ q)$, entonces ∇s es perpendicular a la curva integral en cada punto. Por lo tanto ∇s es paralelo a $\mathbf{n}$, es decir que existirá una función $\mu(x,y)$ tal que $\nabla s = \mu\ \mathbf{n}$. Si se multiplica la función μ por la ecuación $p\ dx + q\ dy = 0$ se obtiene una relación equivalente:

$\partial s/\partial x\, dx + \partial s/\partial y\, dy = ds = 0$ que ahora si es exacta. A dicha función $\mu(x,y)$ se la denomina factor integrante de la ED.

¿Cómo se puede obtener el factor integrante?

Dado que la condición para que $\mu\, p\, dx + \mu\, q\, dy = 0$ sea exacta es que $\partial(\mu\, q)/\partial x = \partial(\mu\, p)/\partial y$ esto conduce a la expresión $q\, \partial\mu/\partial x + \mu\ \partial q/\partial x = p\ \partial\mu/\partial y + \mu\ \partial p/\partial y$, resolver esta última constituye en general un problema más complejo que el inicial. Sin embargo existen algunas circunstancias en que el problema puede reducirse a uno sencillo. Por ejemplo si

a) $\mu = \mu(x)$ el problema se reduce a $\mu = \exp[\int g(x)\, dx]$ donde $g(x) = (\partial p/\partial y - \partial q/\partial x)/q$

b) $\mu = \mu(y)$ el problema se reduce a $\mu = \exp[\int h(y)\, dy]$ donde $h(x) = (\partial q/\partial x - \partial p/\partial y)/p$

Entonces si $(\partial p/\partial y - \partial q/\partial x)/q$ es solo función de x o si $(\partial q/\partial x - \partial p/\partial y)/p$ es solo función de y obtener μ es directo.

5.5.3 Un ejemplo sencillo: Consideremos la ecuación diferencial lineal $y' = a(x)\, y + b(x)$, donde suponemos que $a(x) \neq 0$. Sabemos que el caso homogéneo $y_h' = a(x)\, y_h$, tiene como solución general $y_h(x) = c_1 \exp[\int^x a(t)\, dt]$. Pero para el caso inhomogéneo, escribiendo la ecuación diferencial como $[a(x)\, y + b(x)]\, dx - dy = 0$. Escrita como $p\, dx + q\, dy = 0$, es $p = a\, y + b$, y $q = -1$. Por un lado $\partial q/\partial x = 0$, mientras que $\partial p/\partial y = a \neq 0$. Vemos que $(\partial p/\partial y - \partial q/\partial x)/q = -a(x)$ entonces se puede proponer como factor integrante la solución de la ecuación $\mu' = -a(x)\, \mu$ que determina $\mu(x) = \exp[-\int^x a(t)\, dt]$. De manera que la ecuación diferencial multiplicada por μ queda $ds = [\mu\, a\, y + \mu\, b]\, dx - \mu\, dy = 0$. Integrando $\partial s/\partial y$ respecto a y nos da $s(x,y) = -\mu\, y + h(x)$, que a su vez derivada respecto a x es $-\mu'\, y + h' = \mu\, a\, y + h' = \mu\, a\, y + \mu\, b$. De manera que entonces $h(x) = \exp[-\int^x \mu(t)^{-1}\, q(t)\, dt]$. O sea que la solución general podrá describirse en forma implícita como $s(x,y) = -\mu\, y + \exp[-\int^x \mu(t)^{-1}\, q(t)\, dt] = c$. Podemos escribirla en forma explícita como $y(x) = c_1\, \mu(x)^{-1} + \mu(x) \exp[-\int^x \mu(t)^{-1}\, q(t)\, dt]$, llamando $c_1 = -c$. Para cada valor de c_1 tendremos una solución particular, por ejemplo si $c_1 = 0$, vemos que el segundo termino es pues una solución particular de la ecuación inhomogénea. Por otra parte, recordando la expresión de la solución general del caso homogéneo y su relación con $\mu(x)^{-1}$, podemos expresar la solución de la ecuación inhomogénea como $y(x) = y_h(x) + \mu(x) \exp[-\int^x \mu(t)^{-1}\, q(t)\, dt]$.

Es decir que la solución general de la ecuación inhomogénea, $y(x)$, es la suma de la solución general de la ecuación homogénea, $y_h(x)$, mas una solución particular de la ecuación inhomogénea, $y_{pi}(x)$, y podemos escribirla como $y(x) = y_h(x) + y_{pi}(x)$.

5.5.4 Observación: Si bien esta idea se puede generalizar en la búsqueda de una curva integral en R^n para $n > 2$ a partir de la ecuación $X_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n = 0$, aquí ya no podemos asegurar la existencia de un factor integrante $\mu(x_1, \ldots, x_n)$, a menos que agreguemos más condiciones a las funciones $X_1, \ldots, X_n$. Esto es parte de la teoría de Caratheodory, una de cuyas aplicaciones expresa las leyes de la termodinámica en forma distinta de la formulación canónica que debe apelar al uso de máquinas térmicas, considerando que $(x_1, \ldots, x_n)$ son las variables independientes que definen el sistema.

5.6 La termodinámica desde el enfoque de Caratheodory

A la expresión $đF = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy$ se la denomina forma diferencial en dos variables y a la ecuación $đF = p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = 0$, ecuación diferencial en dos variables, cuyas soluciones se pueden visualizar como curvas en R^2. De la misma forma la expresión

$$đF = X_1(x_1,x_2, ..., x_n)\, dx_1 + X_2(x_1,x_2, ..., x_n)\, dx_2 + ... + X_n(x_1,x_2, ..., x_n)\, dx_n$$

es una forma diferencial en n variables y análogamente $đF = 0$, es una ecuación diferencial en n variables, cuyas soluciones se pueden visualizar como curvas en R^n. Ver Sneddon (1957).
Se vio que para el caso de dos variables siempre existen dos funciones μ y s tal que $\mu\, đF = ds$, o sea $\mu\, p = \partial s/\partial x$ y $\mu\, q = \partial s/\partial y$, es decir:

5.6.1 Teorema: Una ecuación diferencial $đF = 0$ en dos variables, con p y q diferenciables, siempre tiene factor integrante.
Observación: En R^n, con $n > 2$, no alcanza con el hecho que $F_1, ..., F_n$ sean diferenciables para que exista un factor integrante de $đF = 0$.

5.6.2 Teorema (Caratheodory): Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial $đF = 0$ sea integrable (tenga un factor integrante) en un entorno de un punto P_0 es que para todo entorno de P_0 existan siempre otros puntos que no puedan ser alcanzados por curvas de ecuación $đF = 0$.

5.6.3 Termodinámica
Cada uno de los estados (de equilibrio) de un sistema están caracterizados por sus coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que constituyen el espacio fase (por ej. $p, V, n,$ etc.).
Los procesos adiabáticos son aquellos que tienen lugar en un "recinto" (cerrado) en que el estado interno del sistema solo se puede modificar por desplazamientos de un área finita de sus paredes (por ej. pistón).

5.6.4 Primera ley: Para que un sistema termodinámico pase de un estado $(x_1^1, x_2^1,..., x_n^1)$ a otro estado $(x_1^2, x_2^2,..., x_n^2)$ adiabáticamente, es necesario realizar un trabajo mecánico W_a, que es independiente de la forma que se realice, y solo depende de los estados final e inicial, es decir $W_a = W_a\, (x_1^1, x_2^1,..., x_n^1; x_1^2, x_2^2,..., x_n^2)$ es decir:

$$W_a(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0; x_1^2, x_2^2,..., x_n^2) = W_a\, (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0; x_1^1, x_2^1,..., x_n^1) + W_a\, (x_1^1, x_2^1,..., x_n^1; x_1^2, x_2^2,..., x_n^2)$$

de manera que $W_a\, (x_1^1, x_2^1,..., x_n^1; x_1^2, x_2^2,..., x_n^2) = U\, (x_1^2, x_2^2,..., x_n^2) – U\, (x_1^1, x_2^1,..., x_n^1)$

donde $U\, (x_1^1, x_2^1,..., x_n^1) = W_a\, (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0; x_1^1, x_2^1,..., x_n^1)$
es la energía interna del sistema respecto al estado $(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$. Se puede abreviar escribiendo $W_a = \Delta U$.
Si ahora el sistema pasa del estado $(x_1^1, x_2^1,..., x_n^1)$ al estado $(x_1^2, x_2^2,..., x_n^2)$ realizando un trabajo W pero no en un recinto adiabático, también se puede calcular ΔU haciendo el trabajo adiabático (que no tiene porqué ser igual a W). Entonces a la diferencia $Q = \Delta U – W$ se la define

como la cantidad de calor absorbida por el sistema en dicho proceso. En forma diferencial esto se escribe $đQ = dU - đW = dU - p\, dV$, que es de la forma $X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2$. De manera que aquí Q no tiene otro sentido que este que le da la primera ley.

5.6.5 Segunda Ley: Ahora queremos que todos los sistemas termodinámicos que puedan existir en la naturaleza, debe cumplirse que para $đQ = 0$ siempre existan dos funciones μ y S de manera que $\mu\, đQ = dS$, a S se la denomina entropía del sistema y μ^{-1} temperatura absoluta. En dos variables sabemos que siempre existe, pero ¿Qué pasa en más variables?

5.6.6 Caratheodory: Los puntos del espacio fase se pueden dividir en dos clases:
(i) aquellos en que todo entorno del punto siempre contiene otros que no pueden alcanzarse adiabáticamente (por curvas solución de la ecuación $đQ = 0$).
(a) aquellos para los que existe algún entorno en que todos los puntos son accesibles adiabáticamente.

5.6.7 Axioma de Caratheodory: todos los sistemas termodinámicos que existen en la naturaleza corresponden a puntos (i) del espacio fase.

5.6.8 Axioma de Kelvin: En la naturaleza no existe un sistema que pueda convertir una cantidad de calor Q absorbida en trabajo mecánico en un proceso cíclico sin producir al mismo tiempo otros cambios.
Son equivalentes, pues si en la naturaleza existiera un punto P_0 tipo (a) en el espacio fase, se tendría un entorno del mismo en que todos los puntos pueden alcanzarse por una curva $đQ = 0$. Simplificando a variables U y V, entonces consideremos un punto P en dicho entorno tal que $V(P) = V(P_0)$, y $U(P) < U(P_0)$, y ahora tomamos el ciclo en que pasamos de $P \rightarrow P_0$ con V fijo, o sea $W = 0$. Entonces $Q = \Delta U = U(P_0) - U(P) > 0$, siendo Q el calor absorbido por el sistema.
Ahora como P_0 es un punto (a), es posible pasar de $P_0 \rightarrow P$ por una curva tal que $đQ = 0$, en este caso el trabajo mecánico W que se hace sobre el sistema es igual al cambio de energía interna $U(P) - U(P_0) - W = 0$, es decir que el trabajo hecho por el sistema para completar el ciclo es $-W = U(P_0) - U(P) = Q$.
Por lo tanto en el ciclo completo $P \rightarrow P_0 \rightarrow P$ se cumple $-W = Q$, el calor absorbido por el sistema ha sido transformado completamente en trabajo realizado por el mismo.

5.7 El problema de valores iniciales

Un problema de valores iniciales (o de Cauchy) consiste en determinar una (o varias) funciones que satisfagan una ecuación diferencial (o un sistema de ecuaciones diferenciales) ordinaria de primer orden suponiendo que se conoce su valor en un punto fijo.

Dado el problema de valores iniciales de tipo explícito $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ ¿siempre tendrá solución en una región Ω que contenga al punto (x_0,y_0)? En caso de existir una solución, ¿será única? ¿Qué condiciones deberá cumplir la región Ω? ¿Qué condiciones deberá cumplir la función f?

Consideremos Ω como un rectángulo centrado en (x_o,y_o), $\Omega = \{ (x,y) : |x - x_o| \leq a,\ |y - y_o| \leq b \}$ para ciertos números $a > 0$, $b > 0$.

5.7.1 Ejemplo: Dado el problema $y' = 3\,y^{2/3}$, $y(0) = 0$ en $\Omega = \{ (x,y) : |x| \leq 1 , |y| \leq {}^1/_8 \}$.

- ¿Existe solución en Ω?

Por integración obtenemos $y = \phi(x,c_1) = (x + c_1)^3$ que con la condición inicial da $y = \phi(x) = x^3$

Sin embargo la misma no es solución en Ω, ya que si : $|x| > ½$ resulta $|\phi(x)| > {}^1/_8$. Inclusive podría no existir $f(x,y)$ fuera de Ω.

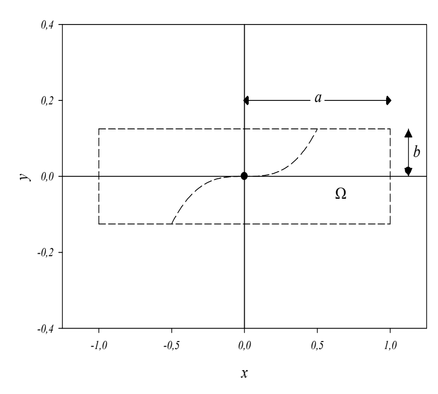


***Figura 5.2** No existe solución y(x) para todos los x en el rectángulo* □.

¿Se puede buscar una región Ω′ más pequeña de manera que $\phi(x)$ sí exista en Ω′ ?

Si agregamos a $f(x,y)$ la condición que sea continua en Ω, entonces existe $M = max|f(x,y)|$ para $(x,y) \in \Omega$, vamos a suponer que $M \neq 0$, pues el caso $M = 0$ es trivial (¿Por qué?). Se tiene la desigualdad $-M \leq f(x,y) \leq M$, que equivale a decir $-M \leq y' \leq M$, ahora vemos que las dos rectas $y = y_o \pm M\,(x - x_o)$ son cotas para toda solución que pase por (x_0,y_0). Si tomamos su intersección con la frontera de Ω obtenemos los puntos $x_1 = x_o \pm (b/M)$, y podemos al menos asegurar que si existe solución, la misma será para $|x - x_o| \leq h = min(a, b/M)$. Por lo tanto habrá que considerar ahora una nueva región $\Omega' = \{ (x,y) : |x - x_o| \leq a,\ |y - y_o| \leq h \}$ siendo $h = min(a, b/M)$, para no tener problemas respecto a la existencia de solución en Ω′.

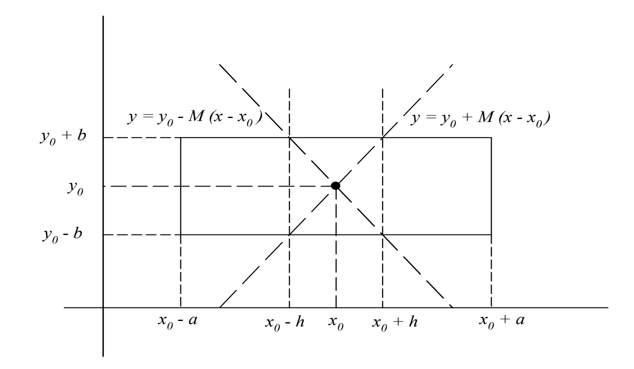


Figura 5.3 *Considerando las rectas que pasan por (x_0,y_0) que tienen pendiente ±M, es posible encontrar un rectángulo que si contenga la solución para todos los valores de x.*

- ¿La solución es única?

En este ejemplo, $y = \psi(x) \equiv 0$, también es solución del problema de valores iniciales, pues satisface la ED y $\psi(0) = 0$. Entonces no basta con que $f(x,y)$ sea continua y restringir la región a Ω' para garantizar unicidad de solución.

Consideremos el problema definido por las condiciones iniciales $\phi_1(0) = 0$ y $\phi_2(0) = c^3$, $|c| < \varepsilon$. Las soluciones son $\phi_1(x) = x^3$ y $\phi_2(x) = (x + c)^3$, respectivamente. Las pendientes están dadas por $\phi_1'(x) = 3x^2$ y $\phi_2'(x) = 3(x + c)^2$ y la diferencia en el origen resulta: $\phi_2'(0) - \phi_1'(0) = 3c^2$ que tiende a cero cuando $c \to 0$, pero no con suficiente rapidez respecto de $\phi_2(0) - \phi_1(0) = c^3$ (es decir tienden a 0 pero con distinto orden de magnitud), es decir el cociente

$$|\phi_2'(0) - \phi_1'(0)| / |\phi_2(0) - \phi_1(0)| = 3|c|^{-1/3},$$

o sea

$|f(0,\phi_2(0)) - f(0,\phi_1(0))| / |\phi_2(0) - \phi_1(0)|$ queda indeterminado cuando $c \to 0$.

En general no necesariamente se cumple la condición de que para todo par (x,y_1), (x,y_2) en Ω, con $y_2 \neq y_1$, existe $N > 0$ tal que $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| / |y_2 - y_1| < N$.

Si existe $N > 0$ tal que $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| / |y_2 - y_1| < N$, diremos que $f(x,y)$ cumple la condición de Lipschitz en la variable y. La no verificación de la condición de Lipschitz explica la no unicidad de la solución del problema anterior.

5.7.2 Observación: Hay una condición más fuerte, pero muchas veces más fácil de comprobar que la de Lipschitz y es que exista $\partial f / \partial y$ y sea continua en Ω. El teorema del valor medio permite establecer la conexión entre ambas condiciones.

De todas maneras si bien hemos planteado condiciones sobre $f(x,y)$ y Ω para resguardarnos que exista solución y sea única para el problema de valores iniciales de tipo explícito $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$, todavía no sabemos

1) como se podría demostrar que estas condiciones son suficientes, ni

2) como encontrar la solución.

Vamos a tratar de responder estas dos preguntas en sentido inverso.

El problema de valores iniciales de tipo explícito $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$ también se puede escribir a través de la ecuación integral

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \ ,$$

donde la función incógnita aparece dentro de la integral y, a diferencia del problema original, la condición inicial no está dada por separado.

Lo interesante de la ecuación integral equivalente al problema de valores iniciales original, es decir $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$, es que permite construir una sucesión de funciones $\{\phi_n(x)\}$ que pueden llegar a aproximar la solución mediante el siguiente esquema, llamado esquema de Picard:

$$\phi_o(x) = y_o\,, \qquad \phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Pero ¿converge dicha sucesión? y ¿qué quiere decir que una sucesión de funciones converge?

5.7.3 Veamos un ejemplo sencillo: $y' = x + y$, $y(0) = 1$ entonces:

$\phi_0(x) = y_o = 1$

$$\phi_1(x) = 1 + \int_0^x \phi_o(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 1 + x + x^2/2$$

$$\phi_2(x) = 1 + \int_0^x \phi_1(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + 2\,t + t^2/2)\, dt = 1 + x + x^2 + x^3/3!$$

$$\phi_3(x) = 1 + \int_0^x \phi_2(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + 2\,t + t^2 + t^3/6)\, dt = 1 + x + x^2 + x^3/3 + x^4/4!$$

$$\phi_4(x) = 1 + \int_0^x \phi_3(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + 2\,t + t^2 + t^3/3 + t^4/4!)\, dt = 1 + x + x^2 + x^3/3 + x^4/(3.4) + x^5/5!$$

. . . .

$\phi_n(x) = 1 + x + 2\,(x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! \ldots) + x^{n+1}/(n+1)!$ Será pues $\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = 1 + x + 2(e^x - 1 - x)$

Efectivamente podemos comprobar que $\phi(x) = 2e^x - 1 - x$ es solución del problema planteado.

Observación: Si bien en este caso la solución se podía obtener por métodos más simples, si este esquema de Picard realmente funciona debería servir para obtener, en forma aproximada, la solución del problema de valores iniciales. Esto nos retrotrae a la pregunta inicial ¿qué quiere decir que una sucesión de funciones converge?

Si $\quad \mathbf{y}(x) = \{ y_1(x), \ldots , y_n(x) \}$

$\quad \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) = \{ f_1(x,\mathbf{y}), \ldots , f_n(x,\mathbf{y}) \}$

es una función vectorial definida y continua, respectivamente, en un intervalo cerrado $I = \{ x : | x - x_0 | \le a \}$ y un dominio cerrado $R = \{ (x, \mathbf{y}) : | x - x_0 | \le a, \| \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \| \le b \}$, donde $\| \ \|$ indica una norma en el espacio de dimensión finita R^n. Con esta notación, el problema de valores iniciales se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Eligiendo las nuevas funciones de manera adecuada, el problema se puede reducir a la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \qquad x_0 \in I \subset R, \quad \mathbf{y}_0 \in \Omega \subset R^n \qquad (1)$$

El problema (1) tiene solución si la función $\mathbf{f}(x,y)$ es continua en R. Una condición suficiente para que la solución sea única es la llamada condición de Lipschitz:

$$\| \mathbf{f}(x,\mathbf{z}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \| \le N \| \mathbf{z} - \mathbf{y} \| \qquad (2)$$

El número N se llama constante de Lipschitz. Si cada componente de $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ es continuamente diferenciable con respecto a cada y_i, un posible valor para la constante de Lipschitz es

$$N = max \mid \partial f_i \;/\; \partial y_j \mid \qquad para \quad x \in I \,,\, \mathbf{y} \in \Omega \,. \qquad (3)$$

Otro enfoque se ve en Elsgoltz (1977), y más completo en Hurewicz (1966) e Ince (1956).

5.8 Puntos singulares y curvas singulares

Una ecuación diferencial de primer orden puede estar escrita de la forma:

$$y' = f(x,y) \qquad (1).$$

o de la forma:

$$p(x,y)\, dx + q(x,y)\, dy = 0 \qquad (2)$$

y en algún punto del plano x, y, tener mas de una curva integral que pasa a través del mismo, o no tener ninguna de tales curvas. A los puntos de esta naturaleza se los llama puntos singulares de la ecuación en cuestión. Pueden ser puntos aislados o pueden constituir toda una curva singular.

Veamos un ejemplo simple de la ecuación (1), como es

$$y' = y^{\alpha} \quad (\alpha > 0) \qquad (3)$$

Consideremos que $y(x)$ es no negativa ($y \ge 0$). Para $y > 0$, la ecuación (3) se puede integrar fácilmente:

$$dy/y^{\alpha} = dx,\;\; y^{1-\alpha}/(1 - a) = x - c \;\text{ si } \alpha \neq 1 \text{ y } \; ln\, y = x - c \;\text{ si } \alpha = 1 \qquad (4).$$

Escribimos $-c$ en lugar de c por conveniencia para lo que sigue. El signo adelante de c no importa, ya que c puede tener cualquier signo. Podemos distinguir los siguientes dos casos:

1. $\alpha > 1$. En este caso la solución de (4) pude re escribirse como

$$y = 1/(\alpha - 1)^{1/(\alpha - 1)}\; 1/\,(c - x)^{1/(\alpha - 1)} = const\,/(c - x)^{1/(\alpha - 1)} \qquad (5)$$

ahora x varia de $-\infty$ a c , cuando y aumenta de cero a infinito. El gráfico se desplaza a lo largo del eje x al variar c. El mismo eje x es una curva integral. Se pude obtener tomando el límite para $c \to \infty$. Vemos que en este caso, para cada punto en el semi plano superior, hay una (y solo una) curva integral que pasa por dicho punto. También vemos que la solución $y(x)$ puede no estar definida en todo el eje x aunque exista en una parte de dicho eje, en el ejemplo la solución $y(x)$ solo existe en el intervalo $-\infty < x < c$.

En el caso $\alpha = 1$ también tenemos unicidad (verificarlo).

2. $0 < \alpha < 1$. La solución (4) puede escribirse

$$y = (1 - \alpha)^{1/(1 - \alpha)}\, (x - c)^{1/(1 - \alpha)} = const\,/(x - c)^{1/(1 - \alpha)} \qquad (6)$$

cuando x varia de c a ∞, la variable y aumenta de cero a infinito. El eje x también es una curva integral, lo que es evidente en la ecuación (3), pero ahora no se puede obtener a partir de la ecuación (6) para ningún valor de c. En este caso, para cada punto del eje x, existen dos curvas integrales distintas que pasan a través de el, a saber, el mismo eje x y la correspondiente curva dada por la ecuación (6). Recordemos que el problema de construir una

curva integral que pase por un punto del plano, se llama problema de valor inicial. En este caso, se viola la unicidad de solución del problema de Cauchy.

Vemos que en este segundo caso los puntos que pertenecen al eje x son puntos singulares. Para encontrar la causa de este fenómeno se puede calcular, en estos puntos ($y = 0$), la derivada con respecto a y del termino de la derecha de la ecuación (3).

$[\partial(y^{\alpha}) / \partial y]_{y=0} = (\alpha y^{\alpha-1})_{y=0}$ para $\alpha > 1$

$[\partial(y^{\alpha}) / \partial y]_{y=0} = 1$ para $\alpha = 1$ y $[\partial(y^{\alpha}) / \partial y]_{y=0} = \infty$ para $\alpha < 1$

Por lo tanto, en el caso $0 < \alpha < 1$, a medida que el punto (x,y) se acerca al eje x, la dirección del campo cambia tan rápidamente que cuando cada curva integral se aproxima al eje lo hace a un valor finito pero no a infinito.

Si investigamos la ecuación (2). Por motivos de simplicidad, supongamos que las funciones p y q son continuas, no se anulan simultáneamente y sus derivadas primeras son finitas. La ecuación (2) puede re escribirse como

$dy/dx = -p(x,y)/q(x,y)$, o bien $dx/dy = -q(x,y)/p(x,y)$ (7)

Entonces podemos aplicar el mencionado teorema respecto a la ecuación $y' = f(x,y)$. De manera que, si $q(x_o,y_o) \neq 0$, o $p(x_o,y_o) \neq 0$ en el punto (x_o,y_o), entonces existe una única curva integral que pasa por el punto (x_o,y_o). (Para aplicar el teorema es suficiente con que alguno de los términos de la derecha de (7) para $f(x,y)$ tenga denominador no nulo). Pero si

$p(x_o,y_o) = 0$, $q(x_o,y_o) = 0$ (8)

ahora la ecuación (2) ya no define una relación entre dx y dy en el punto (x_o,y_o), y por lo tanto la dirección del campo deja de estar determinada en el punto. De aquí que los puntos singulares de la ecuación (2) están definidos por la relación (8). A continuación se presentan ecuaciones diferenciales con puntos singulares en el origen.

(a) Nodo: $y\,dx - x\,dy = 0$, $y = Cx$

(b) Nodo: $2y\,dx - x\,dy = 0$, $y = C x^2$

(c) Punto silla: $y\,dx + x\,dy = 0$, $x y = C$

(d) Centro: $x\,dx + y\,dy = 0$, $x^2 + y^2 = C$

(e) Foco: $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$, $r = C e^{\theta}$ (en coordenadas polares)

En los ejemplos (a), (b), y (e) existe una infinidad de curves integrales que pasan por el punto singular, en el ejemplo (c) hay dos de tales curves, mientras que no hay curves integrales que pasen por el punto en el ejemplo (d). Debe observarse que los ejes coordenados son a su vez curvas integrales en los ejemplos (a), (b), y (c). Para integrar la ecuación (e) es conveniente transformarla a coordenadas polares.

5.9 Reducción a un sistema de primer orden

Toda ecuación diferencial de orden n puede ser escrita como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. Dada la ecuación diferencial de orden n en forma explícita,

$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

definimos una nueva familia de funciones desconocidas $y_1 = y, y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$

Entonces la ecuación diferencial original se puede re escribir como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$y_1' = y_2$

. . . .

$y_n' = f(x, y_1, . . ., y_n)$

que puede escribirse en forma mas compacta con notación vectorial

$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$

donde $\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots\cdot \\ y_n(x) \end{bmatrix}$

5.10 Notas sobre problemas de estabilidad

5.10.1 Dentro de los sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden, muchas veces interesa estudiar aquellos llamados autónomos, que se pueden escribir como:

$y_1' = f_1(y_1, y_2, . . ., y_n)$

$y_2' = f_2(y_1, y_2, . . ., y_n)$

. . . .

$y_n' = f_n(y_1, y_2, . . ., y_n)$

En un sistema autónomo se puede usar una de las componentes de $(y_1, y_2, . . ., y_n)$, por ejemplo y_1, como una nueva variable independiente. Para lo que se requiere que $f_1(y_1, y_2, . . ., y_n) \neq 0$. Usando la regla de la cadena ahora se tiene el siguiente sistema de $(n–1)$ ecuaciones diferenciales:

$dy_2/dy_1 = f_2(y_1, y_2, . . ., y_n) / f_1(y_1, y_2, . . ., y_n)$

$dy_3/dy_1 = f_3(y_1, y_2, . . ., y_n) / f_1(y_1, y_2, . . ., y_n))$

. . . .

$dy_n/dy_1 = f_n(y_1, y_2, . . ., y_n) / f_1(y_1, y_2, . . ., y_n)$

Las soluciones de este sistema en el “espacio fase” $(y_1, y_2, . . ., y_n)$, se llaman órbitas. Si se aplica el teorema de existencia y unicidad al sistema inicial, también se aplica a este, por lo tanto las órbitas en el espacio fase no se cortan.

Por supuesto se deben excluir aquellos puntos singulares que son ceros de f_1. Si f_2 no se anulara en dichos ceros, entonces conviene tomar y_2 como variable independiente, e intercambiar los papeles de ambas. Si los ceros de f_1 y f_2 coinciden, entonces tomar y_3 como variable independiente, etc. Para este razonamiento, sería un verdadero problema si aparecieran puntos $(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ tales que

$f_1(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) = f_2(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) = ... = f_n(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$

A dichos puntos las llamaremos puntos críticos, y a veces puntos de equilibrio.

Cuando se puede eliminar la variable x, muchas veces es posible integrar el sistema de ecuaciones diferenciales resultante, que determina una relación entre las componentes del vector solución $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, se obtiene así una primera integral.

Específicamente, dada una función diferenciable F: $R^n \to R$, y una función vectorial $\mathbf{y}$: $R \to R^n$. La derivada de F a lo largo de la función vectorial $\mathbf{y}$, parametrizada por x, es:

$$L_x F = \partial F/\partial y_1 \; y_1' + \partial F/\partial y_2 \; y_2' + \ldots + \partial F/\partial y_n \; y_n'$$

donde obviamente $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

5.10.2 Definición

En el sistema de ecuaciones

$$y_1' = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n' = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

donde $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Omega \subset R^n$, la función $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.se llama primer integral de dicho sistema sii $L_x F = 0$ en Ω.

Vemos entonces que la primera integral $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es constante a lo largo de las soluciones. Por esto también se las llama constantes del movimiento. De manera que la región definida por $F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, debe contener las órbitas del sistema.

Como muchas, más que soluciones globales, interesan conocer las soluciones locales, sobre todo cerca de estos puntos críticos $(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$.

Existen distintos enfoques para analizar las soluciones alrededor de puntos críticos, algunos de ellos consisten en reemplazar cada una de las funciones f_i por aproximaciones lineales.

La primer observación que podemos hacer es que en un punto crítico se tiene $y_i'(x) = 0$, para todo i, por lo tanto las soluciones son constantes $y_i(x) = y_{i0}$, entonces ¿Cuál sería el problema?. Si por ejemplo las y_i están asociadas a magnitudes experimentales, al "sintonizar" (querer llevar) al sistema cerca de dichos puntos que cumplen $f_i(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = 0$, probablemente no caigamos exactamente en los mismos, sino muy cerca de ellos, y en ese caso ¿Qué sucede? Al menos podrían darse tres situaciones, 1) que el sistema termine cayendo en el punto crítico en cuestión (estable), 2) que por el contrario se aleje del mismo (inestable), y 3) que permanezca aproximadamente a la misma distancia (indiferente), es decir más o menos cerca del punto crítico. Algunas de estas situaciones se discutieron al estudiar puntos y curvas singulares. Se puede plantear un ejemplo donde aparece esta situación, en el mismo la variable x estará asociada al tiempo, por lo cual usaremos t en lugar de x. Para más detalles ver Hahn (1967) y Roxin (1976).

5.10.3 Ejemplo:

Suponemos que se desea analizar la cinética de la siguiente reacción (Lotka):

$$a + y_1 \xrightarrow{k_1} 2\,y_1$$
$$y_1 + y_2 \xrightarrow{k_2} 2\,y_2$$
$$y_2 + b \xrightarrow{k_3} e + b$$

La concentración de las sustancias a y b se mantienen constantes y uniformes dentro del reactor. El sistema es abierto. Debido a los dos pasos auto catalíticos, las velocidades de reacción son cuadráticas en y_1 e y_2. La ecuación del balance de masas es:

$$y_1' = k_1\, a\, y_1 - k_2\, y_1\, y_2$$
$$y_2' = k_2\, y_1\, y_2 - k_3\, b\;\; y_2$$

Para simplificar las ecuaciones llamaremos $\alpha = k_1\, a$, $\beta = k_2$, y $\gamma = k_3\, b$, de manera que el sistema queda:

$$y_1' = \alpha\, y_1 - \beta\, y_1\, y_2$$
$$y_2' = \beta\, y_1\, y_2 - \gamma\, y_2$$

Sujeto a $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, y α, β, γ constantes positivas. Matemáticamente, si $y_1(0) = 0$, de manera que $y_2' = -\gamma\, y_2$, y entonces $y_2(t) = y_2(0)\, exp(-\gamma\, t)$, $y_2(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Los estados de equilibrio corresponden a los puntos críticos $(0,0)$ (no hay sustancias presentes, trivial), y $(\gamma/\beta, \alpha/\beta)$.

La linealización del sistema cerca del punto $(0,0)$ transforma el sistema en:

$$y_1' = \alpha\, y_1$$
$$y_2' = -\gamma\;\; y_2$$

Cuyas soluciones son $y_1(t) = y_1(0)\, exp(\alpha\, t)$, $y_2(t) = y_2(0)\, exp(-\gamma\, t)$.

Mientras que la linealización cerca de $(\gamma/\beta, \alpha/\beta)$ queda:

$$y_1' = -\gamma\, [\, y_2 - (\alpha/\beta)\,]$$
$$y_2' = \alpha\, [\, y_1 - (\gamma/\beta)\,]$$

Cuyas soluciones son combinación lineal de $cos(\alpha\, \gamma\, t)$ y $sen(\alpha\, \gamma\, t)$.

La ecuación de las órbitas en el espacio fase en este caso es

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{y_1}{y_2}\,\frac{\alpha - \beta\, y_2}{\beta\, y_1 - \gamma}$$

Integrando esta ecuación por separación de variables, resulta para $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, que

$$\beta\, y_1 - \gamma\;\; ln\, y_1 + \beta\, y_2 - \alpha\;\; ln\, y_2 = C$$

donde la constante C estará determinada por las condiciones iniciales. De manera que

$$F(y_1, y_2) = \beta\, y_1 - \gamma\;\; ln\, y_1 + \beta\, y_2 - \alpha\;\; ln\, y_2$$

Es una primera integral de la cinética de reacción planteada.

Acabábamos de ver que en la linealización del sistema alrededor del punto crítico $(\gamma/\beta, \alpha/\beta)$ teníamos órbitas cerradas. Usando esta primera integral $F(y_1, y_2)$, vemos que también el mismo resultado es válido para las ecuaciones no lineales. Pues desarrollando F alrededor del punto $(\gamma/\beta, \alpha/\beta)$ queda

$$F(y_1, y_2) = F(\gamma/\beta, \alpha/\beta) + \frac{\beta^2}{2\,\gamma}\left(y_1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + \frac{\beta^2}{2\,\alpha}\left(y_2 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \ldots$$

En los puntos críticos se siguen viendo órbitas cerradas.

De manera que una perturbación finita en la proximidad de $(\gamma/\beta, \alpha/\beta) = (k_3/k_2\, b,\ k_1/k_2\, a)$ también es periódica. Más detalles en Arnold (1992) y Hahn (1967).

Referencias

Arnold V.I. (1992). *Ordinary Differential Equations*. Berlin. Alemania. Springer-Verlag.

Elsgoltz L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y calculo variacional*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Hahn, W. (1967). *Stability of motion*. Berlin. Alemania. Springer-Verlag.

Hurewicz. (1966). *Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*. Madrid. España. Ediciones RIALP, S.A.

Ince, E.L. (1956). *Ordinary differential equations*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Kiseliov A., Krasnov, M. y Makarenko G. (1979). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú*. URSS. Editorial MIR.

Marsden, J.E. y Tromba, A.J. (1991). *Cálculo vectorial*. Wilmington. E.U.A. Addison Wesley Iberoamericana.

Martin, W.T. y Reissner, E. (1957). *Elementary differential equations*. Massachusetts. E.U.A. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Roxin, E.O. y de Spinadel, V.W. (1976). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Sneddon, I.N. (1957). *Elements of Partial Differential Equations*. New York. E.U.A. México D.F. México. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Sokolnikoff, I.S. y Sokolnikoff E.S. (1947). *Matemática superior para ingenieros y físicos*. CABA. Argentina. Librería y Editorial Nigar, SRL.

Spiegel, M.R. (1986). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México. D.F. México. Printice-Hall Hispanoamericana, S.A.

CAPÍTULO 6

Ecuaciones diferenciales lineales

José Luis Vicente

¡Todo fue tan simple!
¡Claro como el cielo!
¡Bueno como el cuento
que en las dulces siestas
nos contó el abuelo!
S.Piana, C.Castillo; CASERÓN DE TEJAS

6.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

6.1.1 Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales se puede escribir como

$$y_i'(x) = \sum p_{ij}(x)\ y_j + q_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n$$

o en forma vectorial como

$$\mathbf{y}'(x) = \Pi(x)\,\mathbf{y}(x) + \mathbf{q}(x)$$

con

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(x) = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \ldots \\ q_n(x) \end{bmatrix}, \quad \Pi(x) = \begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \ldots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \ldots & p_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \ldots & p_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Se denominan homogéneos a los sistema de ecuaciones que verifican $q_i(x) \equiv 0$, mientras que el resto son los inhomogéneos.

A partir de ahora asumimos que todas las funciones $p_{ij}(x)$ y $q_i(x)$ son continuas, de manera que se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad. En otras palabras cualquier problema de valores iniciales asociado a estos sistemas deberá tener una única solución.

6.1.2 Observación 1: Se puede comprobar que la suma de una solución $\mathbf{y}_h(x)$ del sistema homogéneo mas otra $\mathbf{y}_i(x)$ del inhomogéneo, es a su vez solución del sistema inhomogéneo.

A partir del problema de valores iniciales del sistema

$$\mathbf{y}'(x) = \Pi\,\mathbf{y}(x) + \mathbf{q}(x)$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

donde la condición inicial está dada por el vector

$$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \cdots \\ y_{n0} \end{bmatrix},$$

podemos decir que si para cada valor de $\boldsymbol{y}_0$ conocemos la correspondiente solución, entonces conocemos la solución general, que como sabemos depende de n parámetros, en este caso $(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$. En otras palabras, si para cada vector $\boldsymbol{y}_0$ se puede calcular la correspondiente solución entonces se conoce la solución general de dicho sistema.

6.1.3 Observación 2: Si se conoce una solución $\boldsymbol{y}_{pi}(x)$ particular un sistema de ecuaciones diferenciales inhomogéneo y la solución general del mismo sistema homogéneo, entonces es posible conocer la solución general del sistema inhomogéneo. Pues si suponemos que $\boldsymbol{y}_h(x)$ es la solución conocida del sistema in homogéneo, es posible encontrar la solución $\boldsymbol{y}_h(x)$ del sistema homogéneo para el problema de valores iniciales con la condición $\boldsymbol{y}_h(x_0) = \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{y}_{pi}(x_0)$, entonces la función $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_{pi}(x)$ es solución del sistema inhomogéneo, de acuerdo a la observación 1, y además cumple la condición inicial $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, en otras palabras, como el vector $\boldsymbol{y}_0$ es arbitrario, $\boldsymbol{y}(x)$ es solución general del sistema inhomogéneo.

6.2 Sistemas de ecuaciones homogéneas

Si consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de la forma

$$\boldsymbol{y}_h'(x) = \Pi(x)\, \boldsymbol{y}_h(x)$$

vemos que las soluciones tienen la propiedad que $\boldsymbol{y}_1(x)$ e $\boldsymbol{y}_2(x)$ son dos de ellas, entonces cualquier combinación lineal de la forma $c_1\, \boldsymbol{y}_1(x) + c_2\, \boldsymbol{y}_2(x)$ también solución, porque tanto la operación de derivar, como la de multiplicar por una matriz, son lineales. Además la función nula también es solución, y si una función es solución, también lo es su inversa, de manera que podemos afirmar que las soluciones de este sistema forman un espacio vectorial, dentro del espacio de las funciones derivables de algún subconjunto de los reales R en R^n.

¿Qué significará en dicho espacio que un conjunto de funciones $\{\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), ..., \boldsymbol{y}_m(x)\}$, definidas en un intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, es linealmente independiente?

Utilizando la definición de los espacios vectoriales ya vistos, podemos decir que cuando la expresión $\alpha_1\, \boldsymbol{y}_1(x) + \alpha_2\, \boldsymbol{y}_2(x) + ... + \alpha_m\, \boldsymbol{y}_m(x) \equiv \boldsymbol{0}$, admite como única solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

De la misma forma podemos definir un conjunto de funciones linealmente dependiente. De esta forma identificaríamos todas las soluciones si podemos encontrar una base de dicho espacio, es decir, un conjunto de funciones linealmente independientes que además puedan generar todo el espacio. Podemos buscar dicha base, a partir de alguna base conocida de R^n como es la base canónica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$. Por el teorema de existencia y unicidad, sabemos que existen funciones $\{\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), ..., \boldsymbol{y}_n(x)\}$, que son soluciones de los problemas de valores iniciales:

$$\boldsymbol{y}_j'(x) = \Pi(x)\, \boldsymbol{y}_j(x)$$

$$\boldsymbol{y}_j(x_0) = \boldsymbol{e}_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Ahora bien, ¿son estas soluciones una base?

En primer lugar veamos si son linealmente independientes, para esto debemos ver las soluciones de la ecuación $\alpha_1 \mathbf{y}_1(x) + \alpha_2 \mathbf{y}_2(x) + ... + \alpha_n \mathbf{y}_n(x) \equiv \mathbf{0}$, como la misma debe valer en todo un intervalo alrededor de x_0, también vale en x_0, queda pues $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n \equiv \mathbf{0}$, cuya única solución es obviamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Para ver que generan todo el espacio, tomemos una solución cualquiera $\mathbf{y}_h(x)$ del mismo, y veamos si se puede escribir como combinación lineal de $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), ..., \mathbf{y}_n(x)\}$. Tendremos:

$$\mathbf{y}_h'(x) = \Pi(x)\, \mathbf{y}_h(x)$$

$$\mathbf{y}_h(x_0) = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \cdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

Ahora consideramos la función $\mathbf{y}(x) = y_{10}\, \mathbf{y}_1(x) + y_{20}\, \mathbf{y}_2(x) + ... + y_{n0}\, \mathbf{y}_n(x)$, que es solución, por ser combinación lineal de soluciones, y además en x_0 vale $\mathbf{y}(x_0) = y_{10}\, \mathbf{e}_1 + y_{20}\, \mathbf{e}_2 + ... + y_{n0}\, \mathbf{e}_n = \mathbf{y}_0$. Por lo tanto tenemos dos soluciones $\mathbf{y}_h(x)$ e $\mathbf{y}(x)$ que satisfacen el mismo problema de valores iniciales, y el teorema de existencia y unicidad nos dice que dichas soluciones deben ser iguales, es decir que $\mathbf{y}_h(x) \equiv y_{10}\, \mathbf{y}_1(x) + y_{20}\, \mathbf{y}_2(x) + ... + y_{n0}\, \mathbf{y}_n(x)$. Con lo cual es una base del espacio.

Podemos observar además que si definimos la función matricial de $n \times n$

$$\Phi(x) = [\, \mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\,]$$

la solución de cualquier problema de valores iniciales de la forma

$$\mathbf{y}_h'(x) = \Pi(x)\, \mathbf{y}_h(x)$$

$$\mathbf{y}_h(x_0) = \mathbf{y}_0$$

tiene como solución el producto de la matriz $\Phi(x)$ por el vector $\mathbf{y}_0$, es decir

$$\mathbf{y}_h(x_0) = \Phi(x)\ \mathbf{y}_0$$

La derivada de esta función matricial resulta

$$\Phi'(x) = [y_1'(x), \mathbf{y}_2'(x), \ldots, \mathbf{y}_n'(x)] = \Pi(x)[y_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)] = \Pi(x)\ \Phi(x)$$

mientras que su valor en x_0 es

$$\Phi(x_0) = [y_1(x_0), \mathbf{y}_2(x_0), \ldots, \mathbf{y}_n(x_0)] = [e_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n] = I$$

la matriz identidad. Por lo tanto a esta función matricial se la llama matriz solución fundamental.

6.3 Sistemas de ecuaciones no homogéneas

Dado un subconjunto de n funciones reales $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), ..., \mathbf{y}_n(x)\}$ definidas en algún subconjunto de los números reales R en R^n, se llama wronskiano $W(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n)(x)$ de dichas funciones al determinante:

$$W(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n)(x) = \left| [y_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)] \right|$$

donde las barras | | indican el determinante de la matriz encerrada entre las mismas.

Un resultado muy importante es que si se tienen un conjunto de funciones $\{y_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ que son soluciones, en un intervalo $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, de un mismo sistema de ecuaciones

diferenciales ordinarias de primer orden lineales y homogéneo, si el wronskiano de las mismas se anula en x_0, entonces tales funciones son linealmente dependientes en tal intervalo, y el wronskiano se elimina en todo el intervalo.

Para ver esto se puede emplear un resultado de las asignaturas de álgebra, referido a los sistemas de n ecuaciones algebraicas lineales homogéneas con n incógnitas, que establece una equivalencia entre el hecho de que exista una solución no nula $\{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0\}$ y que el determinante de dicho sistema sea nulo.

Por un lado sabemos que el determinante $|[y_1(x_0), \boldsymbol{y}_2(x_0), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x_0)]| = 0$, ya que es el wronskiano evaluado en x_0, el resultado mencionado existen $\{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0\}$ no todos nulos, tales que $\alpha_1^0 \boldsymbol{y}_1(x_0) + \alpha_2^0 \boldsymbol{y}_2(x_0) + \ldots + \alpha_n^0 \boldsymbol{y}_n(x_0) = \boldsymbol{0}$. Por otro lado, ahora consideremos la función vectorial definida por $\boldsymbol{y}(x) = \alpha_1^0 \boldsymbol{y}_1(x) + \alpha_2^0 \boldsymbol{y}_2(x) + \ldots + \alpha_n^0 \boldsymbol{y}_n(x)$, vemos que es solución del sistema de ecuaciones diferenciales (por ser combinación lineal de soluciones), y además cumple la condición inicial que $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{0}$. Pero la función vectorial $\boldsymbol{z}(x) \equiv \boldsymbol{0}$, que es idénticamente nula en todo el intervalo, también es solución y satisface la misma condición inicial. Entonces, de acuerdo al teorema de existencia y unicidad debe cumplirse $\boldsymbol{y}(x) \equiv \boldsymbol{z}(x) \equiv \boldsymbol{0}$, en todo el intervalo. En otras palabras tenemos $\alpha_1^0 \boldsymbol{y}_1(x) + \alpha_2^0 \boldsymbol{y}_2(x) + \ldots + \alpha_n^0 \boldsymbol{y}_n(x) \equiv \boldsymbol{0}$, con los $\{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0\}$ no todos nulos, o sea que las funciones $\{\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)\}$ son linealmente dependientes en el intervalo $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$,

Además si ahora tomamos un punto cualquiera x_1 en dicho intervalo, se cumple que el conjunto de números $\{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0\}$ no todos nulos, satisface $\alpha_1^0 \boldsymbol{y}_1(x_1) + \alpha_2^0 \boldsymbol{y}_2(x_1) + \ldots + \alpha_n^0 \boldsymbol{y}_n(x_1) = \boldsymbol{0}$, de manera que si usamos la inversa de la equivalencia del resultado de algebra mencionado al principio, deberá ser el determinante de dicho sistema (wronskiano en x_1) nulo, que escribimos como $|[y_1(x_1), \boldsymbol{y}_2(x_1), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x_1)]| = W(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)(x_1) = 0$. Como x_1 es arbitrario, la igualdad vale para cualquier x del intervalo.

Observación: Esta resultado a su vez nos dice que es equivalente decir que un conjunto de funciones $\{y_1(x), \boldsymbol{y}_2(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)\}$ que son soluciones, en un intervalo $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, de un mismo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales y homogéneo, si el wronskiano de las mismas no se anula en x_0, entonces tales funciones son linealmente independientes en tal intervalo, y el wronskiano no se elimina en todo el intervalo.

Por dicho, al comenzar con los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales, sabemos que la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales lineal inhomogéneo

$$\boldsymbol{y}'(x) = \Pi(x)\, \boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{q}(x)$$

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

puede construirse a partir de una solución particular de este sistema sumada a la solución general del sistema homogéneo. Podemos buscar una solución particular de este sistema, que además tenga como condición inicial el vector nulo, de esta forma la condición requerida para la solución de la homogénea coincidirá con la del problema inicial. Entonces buscamos una solución de

$$\boldsymbol{y}_{pi}'(x) = \Pi(x)\, \boldsymbol{y}_{pi}(x) + \boldsymbol{q}(x)$$

$$\boldsymbol{y}_{pi}(x_0) = \boldsymbol{0}$$

Vamos a proponer como solución

$$\mathbf{y}_{pi}(x) = \Phi(x)\ \mathbf{c}(x)$$

donde $\mathbf{c}(x)$ es una función vectorial a determinar. ¿Por qué?

En primer lugar vemos que ocurre con esta propuesta en x_0:

$$\mathbf{y}_{pi}(x_0) = \Phi(x_0)\ \mathbf{c}(x_0) = I\ \mathbf{c}(x_0) = \mathbf{c}(x_0) = \mathbf{0}$$

Ahora si derivamos la solución propuesta queda:

$$\mathbf{y}'_{pi}(x) = \Phi'(x)\ \mathbf{c}(x) + \Phi(x)\ \mathbf{c}'(x) = \Pi(x)\Phi(x)\ \mathbf{c}(x) + \Phi(x)\ \mathbf{c}'(x) = \Pi(x)\ \mathbf{y}_{pi}(x) + \Phi(x)\ \mathbf{c}'(x)$$

y si comparamos esta expresión con la ecuación inicial, y cancelamos $\Pi(x)\ \mathbf{y}_{pi}(x)$ resulta:

$$\Phi(x)\ \mathbf{c}'(x) = \mathbf{q}(x)$$

Queremos determinar la función vectorial $\mathbf{c}(x)$, a partir de esta ecuación. Ahora bien, dado que en la matriz $\Phi(x) = [\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x),\ldots, \mathbf{y}_n(x)]$, las funciones $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x),\ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ son soluciones linealmente independientes, de acuerdo a la última observación, su determinante, es decir el wronskiano, no se anula en un entorno de x_0, por lo tanto existirá la inversa $\Phi^{-1}(x)$ de la matriz $\Phi(x)$. De manera que si multiplicamos ambos miembros por dicha inversa, obtenemos:

$$\mathbf{c}'(x) = \Phi^{-1}(x)\ \mathbf{q}(x)$$

Finalmente integrando y recordando que $\mathbf{c}(x_0) = \mathbf{0}$, se llega a

$$\mathbf{c}(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\ \mathbf{q}(t)\ dt$$

De manera que la solución particular del sistema inhomogéneo buscada es

$$\mathbf{y}_{pi}(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\ \mathbf{q}(t)\ dt$$

Quedando la solución del problema de valores iniciales

$$\mathbf{y}'(x) = \Pi(x)\ \mathbf{y}(x) + \mathbf{q}(x)$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

como $\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_{pi}(x) = \Phi(x)\ \mathbf{y}_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\ \mathbf{q}(t)\ dt$

Vemos pues que encontrar las n soluciones $\{\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x),\ldots, \mathbf{y}_n(x)\}$ es fundamental para resolver el problema. Si bien esta tarea no es trivial, existen algunos casos en que se puede simplificar bastante. Ver también Arnold (1992), Esgoltz (1977), Hildebrand (1973) y Kreyszig (1991).

6.4 Sistemas a coeficientes constantes

Para un sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo con coeficientes constantes, es decir cuando la función matricial $\Pi(x)$, se reduce a una matriz Π, no es necesario considerar la condición inicial en un punto x_0, pues la solución es invariante mediante translaciones. Es decir si se tiene el problema de valores iniciales:

$$\mathbf{y}_h'(x) = \Pi\ \mathbf{y}_h(x)$$

$$\mathbf{y}_h(x_0) = \mathbf{y}_0$$

mediante el cambio de variables $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}(t + x_0) = \boldsymbol{y}(x)$, como las derivadas tanto con respecto a x como con respecto a $t = x - x_0$, coinciden, el problema de valores iniciales para $\boldsymbol{v}$ es ahora:

$$\boldsymbol{v}'(t) = \Pi\ \boldsymbol{v}(t)$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

Una vez resuelto este problema, con la relación $\boldsymbol{y}(x) = v(x - x_0)$, se obtiene la solución del problema original. Por lo tanto a partir de ahora solo resolveremos este último problema, usando x como variable independiente, y si la condición no es en el origen, simplemente al final se deberá reemplazar x por $x - x_0$.

Entonces para resolver el problema

$$\boldsymbol{y}_h'(x) = \Pi\ \boldsymbol{y}_h(x)$$

$$\boldsymbol{y}_h(0) = \boldsymbol{y}_0$$

veamos primero que una solución fundamental se puede construir explícitamente. El sistema puede escribirse como una ecuación diferencial matricial

$$\Phi_h' = \Pi\ \Phi_h$$

cuya solución, en analogía con el caso en que la matriz fuera de orden 1×1 (un número) la podemos escribir en forma de matriz exponencial

$$\Phi(x)\ \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{e}^{x\Pi}\boldsymbol{y}_0$$

donde $\Phi(x)$ es una matriz fundamental de la ecuación diferencial original.

Formalmente podríamos expresar $\Phi(x)$ como un desarrollo en serie de potencias de matrices (admitiendo que dicho desarrollo converja) de la forma:

$$\Phi(x) = \boldsymbol{e}^{x\Pi} = I + x\,\Pi + (1/2!)\,x^2\,\Pi^2 + (1/3!)\,x^3\,\Pi^3 + \ldots$$

Para explicitar el cálculo de esta expresión primero transformamos Π en su forma normal de Jordan. Se tiene el resultado algebraico que dice que para cualquier matriz cuadrada Π, que no posee filas o columnas nulas, siempre es posible encontrar una matriz $\boldsymbol{T}$, con inversa, de manera que $\Pi = \boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{T}^{-1}$, donde $\boldsymbol{J}$ es una **matriz de Jordan** que puede escribirse como una matriz diagonal en bloques igual a

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_1 & O & \cdots & O \\ O & J_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & J_m \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{J}_i \text{ matriz elemental de Jordan, } \boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_i & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i\, I_{ni} + N_{ni}$$

siendo λ_i las raíces del polinomio característico $det(\lambda\, I - \Pi) = (\lambda - \lambda_1)^{n1}\,(\lambda - \lambda_2)^{n2}\ldots(\lambda - \lambda_m)^{nm} = 0$.

Donde I_{ni} son las matrices identidad de $n_i \times n_i$, y N_{ni} se llaman matrices nihilpotentes, cada potencia da matrices nulas excepto una diagonal sobre la diagonal principal, son unos, que se desplaza a la derecha, a medida que aumentan las potencias, hasta llegar a la potencia n_i que da la matriz nula. En este caso queda

$$e^{x\,\Pi} = e^{x\,\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{T}^{-1}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}^{x\,\boldsymbol{J}}\,\boldsymbol{T}^{-1}$$

Finalmente la expresión $\boldsymbol{e}^{x\,\boldsymbol{J}}$ se puede escribir como una matriz diagonal en bloques de matrices de la forma

$$e^{xJ_i} = e^{\lambda_i x}\begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2! & \dots & x^{ni-2}/(n_i-2)! & x^{ni-1}/(n_i-1)! \\ 0 & 1 & x & \dots & x^{ni-3}/(n_i-3)! & x^{ni-2}/(n_i-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & x^{ni-4}/(n_i-4)! & x^{ni-3}/(n_i-3)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se propone como ejercicio demostrar esta igualdad a partir de $\boldsymbol{J}_i = \lambda_i I_{ni} + N_{ni}$.

Ejemplo (caso en que todas las raíces del polinomio característico son simples)

Si las raíces de $det(\lambda\, I - \Pi) = 0$ son simples, las matrices elementales de Jordan son de 1×1, entonces $\boldsymbol{J}$ es una matriz diagonal de la forma:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

En este caso la matriz exponencial también es diagonal

$$e^{x\boldsymbol{J}} = e^{x\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

Como $\Pi\boldsymbol{T} = \boldsymbol{TD}$, vemos que los λ_i son los autovalores de la matriz Π , mientras que las columnas de $\boldsymbol{T}$ son los autovectores de Π. Veamos un caso particular:

$\begin{cases} y_1' = \alpha\, y_1 - \beta\, y_2 \\ y_2' = \alpha\, y_2 + \beta\, y_1 \end{cases}$ donde α y β son dos números reales cualesquiera. Entonces

$\Pi = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ los autovalores dan $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha - i\beta \\ \lambda_2 = \alpha + i\beta \end{cases}$ y entonces $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ y como $\boldsymbol{e}^{x\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{e}^{x\boldsymbol{D}} = e^{\alpha x}\begin{bmatrix} e^{-i\beta x} & 0 \\ 0 & e^{+i\beta x} \end{bmatrix}$,

luego de simplificar la matriz solución fundamenta queda

$$e^{x\Pi} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{e}^{xD}\,\boldsymbol{T}^{-1} = e^{\alpha x}\begin{bmatrix} \cos\beta x & -\operatorname{sen}\beta x \\ \operatorname{sen}\beta x & \cos\beta x \end{bmatrix}$$

Observación 1: Las soluciones de la EDO deben ser funciones reales, sin embargo la matriz e^{xD} está formada por funciones complejas.Esto puede ser así porque la matriz (de autovalores) $\boldsymbol{T}$ es compleja, así como $\boldsymbol{T}^{-1}$. Finalmente la matriz solución fundamental $e^{x\Pi}$ queda real.

Obviamente si por ejemplo $\beta = 0$, los autovalores hubieran sido reales y todas las matrices deberán ser reales. Más allá del hecho, que ya no tendríamos dos raíces distintas (complejas

conjugadas) sino una sola raíz múltiple ($\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$) y deberíamos hace una descomposición de Jordan para obtener $\boldsymbol{J}$, en lugar de una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$.

Observación 2: Un caso particular del anterior sistema de EDO de primer orden, se obtiene al tratar de resolver la EDO de segundo orden $y'' = -y$, pues dicha ecuación se reduce, como señalamos anteriormente, a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, igual al ejemplo con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Admitiendo como soluciones la primera fila de la matriz solución fundamental, es decir $\{cos\ x\ ,\ sen\ x\}$. Obviamente la solución para la ecuación $y'' = -\omega^2 y$, se obtiene la misma ecuación si se emplea como variable $t = \omega\ x$, de manera que las dos soluciones linealmente independientes en este caso quedan $\{cos\ \omega x\ ,\ sen\ \omega x\}$.

6.5 Transformada de Laplace

6.5.1 Se dice que una función $y(x)$ es de orden exponencial si $y(x)$ es una función real definida en R_o^+ y existen tres constantes positivas M, N, γ, tales que si $x > N$ entonces $|y(x)| \leq M\ e^{\gamma x}$.

Si $y(x)$ es seccionalmente continua en un intervalo $0 \leq x \leq N$, y de orden exponencial para $x > N$, se define la transformada de Laplace, $Y(s)$, como:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-s\,x}\ f(x)\ dx$$

6.5.2 Observación: La integral está bien definida si $s > s_o$, para algún $s_o \in R$.

6.5.3 Propiedades

Propiedad 1: Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son de orden exponencial, c_1 y c_2 dos constantes, entonces

$\mathcal{L}\ \{c_1 y_1(x) + c_2\ y_2(x)\} = c_1\ \mathcal{L}\ \{y_1(x)\} + c_2\ \mathcal{L}\ \{y_2(x)\}$, $\mathcal{L}$ es un operador lineal.

Propiedad 2: Si $y(x) = e^{\lambda\,x}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{\ e^{\lambda\,x}\ \} = (s - \lambda)^{-1}$.

En particular si $\lambda = 0$, es decir si $y(x) = 1$, resulta $Y(s) = \mathcal{L}\ \{1\} = s^{-1}$.

Propiedad 3: Si $y(x) = e^{i\beta x}$, $\mathcal{L}\ \{cos\ \beta x + i\ sen\ \beta x\} = \mathcal{L}\ \{cos\ \beta x\} + i\ \mathcal{L}\ \{sen\ \beta x\}$, por P1, además por P2:

$\mathcal{L}\ \{e^{i\beta x}\ \} = (s - i\ \beta)^{-1} = \beta / (s^2 + \beta^2) + i\ s/ (s^2 + \beta^2)$, es decir que:

$\mathcal{L}\ \{sen\ \beta x\} = s/ (s^2 + \beta^2)$, $\mathcal{L}\ \{cos\ \beta x\ \} = \beta / (s^2 + \beta^2)$.

Propiedad 4: Si $f(x) = e^{\alpha x}\ y(x)$ y además $Y(s) = \mathcal{L}\ \{y(x)\}$, entonces $\mathcal{L}\ \{\ e^{\alpha x}\ y(x)\ \} = Y(s - \alpha)$.

Propiedad 5: Integrando por partes resulta:

$\mathcal{L}\ \{y'(x)\} = -y(0) + s\ \mathcal{L}\ \{y(x)\}$

$\mathcal{L}\ \{y''(x)\} = -y'(0) + s\ \mathcal{L}\ \{y'(x)\} = -y'(0) - y(0)\ s + s^2\ \mathcal{L}\ \{y(x)\}$

. . . .

$\mathcal{L}\ \{y^{(n)}(x)\} = -y^{(n-1)}(0) - y^{(n-2)}(0)\ s + \ldots + s^n\ \mathcal{L}\ \{y(x)\}$

Propiedad 6: $y(x) = x$, $y'(x) = 1$, por lo tanto: $\mathcal{L}\ \{1\} = s\ \mathcal{L}\ \{x\} = s^{-1}$, es decir $\mathcal{L}\ \{x\} = s^{-2}$.

$y(x) = x^2$, $y'(x) = 2x$, por lo tanto: $\mathcal{L}\ \{2\ x\} = s\ \mathcal{L}\ \{x^2\} = 2\ s^{-2}$, es decir $\mathcal{L}\ \{x^2\} = 2\ s^{-3}$.

En general: $\mathcal{L}\,\{x^n\} = n!\, s^{-(n+1)}$.

6.5.4 Ejemplo: Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales a coeficientes constantes, caso homogéneo.

$y'_1 = 4\,y_1 - 2\,y_2 \quad , y_1(0) = y_{10} \qquad sY_1 - y_{10} = 4\,Y_1 - 2\,Y_2 \qquad (s-4)\,Y_1 + 2\,Y_2 = y_{10}$

$y'_2 = y_1 + y_2 \qquad , y_2(0) = y_{20} \qquad sY_2 - y_{20} = Y_1 + Y_2 \qquad -Y_1 + (s-1)\,Y_2 = y_{20}$

Resolvemos el sistema, llamando Δ al determinante, $\Delta = (s-4)(s-1) + 2 = (s-2)(s-3)$

$Y_1(s) = [\,y_{10}\,(s-1) - 2\,y_{20}]/\,\Delta = [\,y_{10}\,s - (\,y_{10} + 2\,y_{20})]/\,\Delta = A/\,(s-2) + B/\,(s-3)$, usamos la P2.

Queda $A = 2\,y_{20} - y_{10}$, $B = 2(\,y_{10} - y_{20})$. Entonces $y_1(x) = A\,e^{2\,x} + B\,e^{3\,x}$. Análogamente para $y_2(x)$.

Emplear la transformada de Laplace para resolver el problema de valores iniciales homogéneo es equivalente a realizar los mismos cálculos que antes (calculando los autovalores), dado que a partir de:

$$\boldsymbol{y}_h'(x) = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{y}_h \qquad \boldsymbol{y}_h(0) = \boldsymbol{y}_0$$

llamando $\boldsymbol{Y}_h(s)$ a la tansformada de Laplace de $\boldsymbol{y}_h(x)$, resulta:

$$s\boldsymbol{Y}_h(s) - \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{Y}_h(s) \quad \therefore \quad (s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi})\,\boldsymbol{Y}_h(s) = \boldsymbol{y}_0 \quad \therefore \quad (\boldsymbol{I} - s^{-1}\,\boldsymbol{\Pi})\boldsymbol{Y}_h(s) = s^{-1}\,\boldsymbol{y}_0$$

De las relaciones:

$$\boldsymbol{I}\,(\,\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots\,) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots$$

$$\boldsymbol{A}\,(\,\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots\,) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \ldots,$$

su resta da $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots\,) = \boldsymbol{I}$, es decir que entonces $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots$

Si $\boldsymbol{A} = s^{-1}\,\boldsymbol{\Pi}$, la ecuación $(I - s^{-1}\,\boldsymbol{\Pi})\,\boldsymbol{Y}_h(s) = s^{-1}\,\boldsymbol{y}_0$ equivale a $\boldsymbol{Y}_h(s) = (I s^{-1} + \boldsymbol{\Pi} s^{-2} + \boldsymbol{\Pi}^2 s^{-3} + \ldots)\,\boldsymbol{y}_0$

De la propiedad 6 $\mathcal{L}\{x^n\} = n!\ s^{-(n+1)}$, resulta $s^{-(n+1)} = \mathcal{L}\{x^n/\,n!\}$, y por lo tanto se obtiene nuevamente:

$$\boldsymbol{y}_h(x) = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Pi}x\,/\,1! + \boldsymbol{\Pi}^2\,x^2\,/\,2! + \ldots)\,\boldsymbol{y}_0 = [\,\boldsymbol{I} + (\,\boldsymbol{\Pi}x\,)/\,1! + (\,\boldsymbol{\Pi}x)^2\,/\,2! + \ldots\,]\,\boldsymbol{y}_0 = exp[\boldsymbol{\Pi}x]\,\boldsymbol{y}_0$$

6.5.5 Aplicación al movimiento oscilatorio: Para estirar un resorte una pequeña distancia, sin aceleración, se necesita una fuerza proporcional a la distancia estirada: $F = k\,y$. El resorte al ser extendido, reacciona con una fuerza igual y opuesta. Este es el principio del resorte, o dinamómetro, comúnmente usado para medir fuerzas. De manera que la fuerza de atracción (hacia la posición inicial de equilibrio $y = 0$) es $F = -\,k\,y$. Un objeto de masa m cumplirá la ecuación del movimiento $F = m\,y''$, y su dinámica esta descripta por $m\,y'' = -\,k\,y$, que se puede escribir como

$y'' + \omega^2 y = 0$, donde $\omega^2 = k/m$, a ω se la llama frecuencia angular (luego veremos porque)

tomando la transformada de Laplace, queda: $(s^2 + \omega^2)\;Y(s) = y'(0) + y(0)\,s$

Que puede escribirse como $Y(s) = a_1 \dfrac{s}{s^2 + \omega^2} + a_2 \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, donde $a_1 = y(0)$ y $a_2 = y'(0)/\omega$.

La solución es:

$$y(t) = a_1\,cos\,\omega t + a_2\,sen\,\omega t,$$

pero esta no es la forma que se acostumbra expresarla, porque llamando $A = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}$, y definiendo el ángulo ϕ_0 mediante las expresiones $sen\ \phi_0 = a_1/A$, $cos\ \phi_0 = a_2/A$ (donde $A > 0$, ya que

si $a_1 = a_1 = 0$, se tiene la solución nula, que corresponde a condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$), la solución finalmente se reescribe:

$$y(t) = A\, sen(\omega t + \phi_0)$$

que describe un movimiento oscilatorio, es decir un movimiento periódico que se repite cuando t aumenta una cantidad $2\pi/\omega$, A es la amplitud de dicho movimiento, $\phi = \omega t + \phi_0$ se lo llama fase, y ϕ_0 la fase inicial.

Si ahora consideramos además de la fuerza del resorte, el hecho que el objeto se mueve a través de un fluido, debemos tener en cuenta las fuerzas de fricción. Estas fuerzas se puede aproximar suponiendo que son proporcionales a la velocidad y opuestas a ella, en nuestro caso $F_f = -\eta\, y'$, donde el coeficiente η depende de la forma del objeto y de la fricción interna del fluido (fuerzas de fricción entre las distintas capas del fluido que se mueven a distintas velocidades). De manera que la ecuación de movimiento ahora es

$$y'' + \eta\, y' + \omega^2 y = 0$$

De manera que la transformada de Laplace, queda: $(s^2 + \eta\, s + \omega^2)\, Y(s) = y'(0) + \eta\, y(0) + y(0)\, s$, es decir

$$Y(s) = \frac{c_1 s + c_2}{s^2 + \eta s + \omega^2},$$ donde $c_1 = y(0)$, $c_2 = y'(0) + \eta\, y(0)$, y llamando $\alpha = ½\, \eta$, entonces

como $s^2 + 2\,\alpha\, s + \omega^2 = (s + \alpha)^2 + \beta^2$, donde llamamos $\beta^2 = \omega^2 - \alpha^2$, y ahora se reescribe

$$Y(s) = a_1 \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + a_2 \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$, donde $a_1 = c_1$ y $a_2 = (c_2 - \alpha\, c_1)/\beta$. La solución queda:

$$y(t) = a_1\, e^{-\alpha t} cos\, \beta t + a_2\, e^{-\alpha t} sen\, \beta t,$$

o también

$$y(t) = A\, e^{-\alpha t} sen\, (\beta t + \phi_0),$$

De manera que la amplitud es $A\, e^{-\alpha t}$, es decir que, debido a las fuerzas de fricción, decrece con el tiempo, y también modifican la frecuencia angular, pues ahora es $\beta = \sqrt{[\omega^2 - \alpha^2]}$.

6.5.6 Observación: Cualquier función de orden exponencial $y(x)$, aunque solo se encuentre definida para $x \geq 0$, se la puede extender para todo R, con considerar $y(x) = 0$ si $x < 0$. De manera que la transformada de Lapalce se puede escribir como una integral sobre todo R.

6.5.7 Observación: Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son de orden exponencial se define la convolución con la notación $(y_1{*}y_2)\,(x) = y_1(x){*}y_2(x)$ como

$$(y_1{*}y_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x-t)\, y_2(t)\, dt = \int_0^x y_1(x-t)\, y_2(t)\, dt$$

Si y_1 e y_2 son dos señales ¿cómo puede interpretarse esto?

Propiedad 7: Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son de orden exponencial, y además $Y_1(s) = \mathcal{L}\{y_1(x)\}$ e $Y_2(s) = \mathcal{L}\{y_2(x)\}$, entonces $\mathcal{L}\{(y_1{*}y_2)(x)\} = Y_1(s)\, Y_1(s)$. Pues:

$$\mathcal{L}\,\{(y_1{*}y_2)(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x-t)\, y_2(t)\, dt\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(x-t)} y_1(x-t)\, d(x-t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} y_2(t)\, dt = Y_1(s)Y_2(s)$$

6.5.8 Ejemplo: Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden lineales a coeficientes constantes, caso inhomogéneo. Partiendo del problema de valores iniciales:

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{q}(x) \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$

Llamamos $\boldsymbol{Y}(s)$ y $\boldsymbol{Q}(s)$ a las transformadas de Laplace de $\boldsymbol{y}(x)$, y $\boldsymbol{q}(x)$ respectivamente. Entonces:

$$s\boldsymbol{Y}(s) - \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\Pi}\,\boldsymbol{Y}(s) + \boldsymbol{Q}(s) \;\therefore\; (s\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi})\,\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{Q}(s) \;\therefore\; (\boldsymbol{I} - s^{-1}\boldsymbol{\Pi})\,\boldsymbol{Y}(s) = s^{-1}\boldsymbol{y}_0 + s^{-1}\boldsymbol{Q}(s)$$

$(\boldsymbol{I} - s^{-1}\boldsymbol{\Pi})\,\boldsymbol{Y}(s) = s^{-1}\boldsymbol{y}_0 + s^{-1}\boldsymbol{Q}(s)$ equivale a

$$\boldsymbol{Y}(s) = (\boldsymbol{I}s^{-1} + \boldsymbol{\Pi}s^{-2} + \boldsymbol{\Pi}^2 s^{-3} + \ldots)\,\boldsymbol{y}_0 + (\boldsymbol{I}s^{-1} + \boldsymbol{\Pi}s^{-2} + \boldsymbol{\Pi}^2 s^{-3} + \ldots)\,\boldsymbol{Q}(s)$$

De las propiedades 6 y 7 resulta que:

$$\boldsymbol{y}(x) = exp[\boldsymbol{\Pi}x]\,\boldsymbol{y}_0 + exp[\boldsymbol{\Pi}x] * \boldsymbol{q}(x) = exp[\boldsymbol{\Pi}x]\,\boldsymbol{y}_0 + \int_0^x exp[\boldsymbol{\Pi}(x-t)]\,\boldsymbol{q}(t)\,dt = \boldsymbol{y}_h(x) + \boldsymbol{y}_{pi}(x)$$

En concordancia con los resultados previos. Ver otros ejemplos en Spiegel (1992).

6.6 Operadores diferenciales lineales

La búsqueda de soluciones de una EDO de orden n lineal a coeficientes constantes puede encararse o bien usando la transformada de Laplace, o bien el método de las matrices (transformando la EDO en un sistema de EDO de primer orden). Puede probarse que ambos métodos son equivalentes, y también que existe otra forma de abordar el problema.

La EDO de primer orden lineal la podemos escribir

$$y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y + q(x)$$

o usando el operador $\hat{L} = \frac{d^n}{dx^n} - p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} - p_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} - \ldots - p_{n-1}\frac{d}{dx} - p_n$ como $\hat{L}[y(x)] = q(x)$

6.6.1 Caso homogéneo

Se trata de buscar soluciones, $y_h(x)$, de la ecuación $\hat{L}[y_h(x)] = 0$

Dichas funciones formas el núcleo del operador, es decir entendemos por núcleo del operador al conjunto $\mathrm{N}(\hat{L}) = \{y_h(x) \;/\; \hat{L}[y_h(x)] = 0\}$. Si comparamos el polinomio característico, $P(\lambda)$, del sistema de EDO de primer orden equivalente, vemos que

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n$$

entonces $\hat{L} = P\left(\frac{d}{dx}\right)$, y si descomponemos dicho polinomio en sus n raíces, λ_1, λ_2, ... λ_n, queda

$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$, y el operador es ahora $\hat{L} = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right)$

Es decir que se puede escribir el operador como $\hat{L} = \hat{L}_1 \hat{L}_2 \ldots \hat{L}_n$, donde $\hat{L}_k = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right)$, en otras palabras la EDO se puede escribir como $\hat{L}[y_h(x)] = \hat{L}_1 \hat{L}_2 \ldots \hat{L}_n [y_h(x)]$.

Se pueden dar distintas situaciones, de acuerdo a los valores que puedan tomar los distintos λ_k. A saber:

a) Las raíces del polinomio son reales y distintas. En este caso tenemos dos puntos a considerar, en primer lugar vemos que la solución de la ecuación

$\hat{L}_k [y_k(x)] = \frac{dy_k}{dx} - \lambda_k y_k(x) = 0$ es $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$, además los núcleos de los operadores $\hat{L}_k$ tienen como intersección $\{0\}$, y las $y_k(x)$ son linealmente independientes. Por lo tanto dichos operadores conmutan.

Como $\hat{L}_k [0] = 0$, resulta $\hat{L}[y_k(x)] = \hat{L}_1 \hat{L}_2 \ldots \hat{L}_n [y_k(x)] = \hat{L}_1 \hat{L}_2 \ldots \hat{L}_{k-1} \hat{L}_{k+1} \ldots \hat{L}_k [y_k(x)] = 0$,

en otras palabras cada $y_k(x)$ es solución, y como además son linealmente independientes, la solución general será

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

b) Hay raíces del polinomio que son complejas. Supongamos que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Entonces el polinomio debe ser de la forma

$$P(\lambda) = [(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2]\,(\lambda - \lambda_3) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

y el operador queda $\hat{L} = \left[\left(\frac{d}{dx} - \alpha \right)^2 + \beta^2 \right] \left(\frac{d}{dx} - \lambda_3 \right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \lambda_n \right)$

Ahora buscamos $y_\pm(x)$ tal que $\hat{L}_\pm [y_\pm(x)] = \left[\left(\frac{d}{dx} - \alpha \right)^2 + \beta^2 \right] [y_\pm(x)] = 0$

Tomando en cuenta la parte entre paréntesis, proponemos $y_\pm(x) = u(x)\, e^{\alpha x}$, entonces queda:

$\left(\frac{d}{dx} - \alpha \right)^2 [u(x) e^{\alpha x}] = u''(x) e^{\alpha x}$, $\hat{L}_\pm [u(x) e^{\alpha x}] = [u''(x) + \beta^2 u(x)] e^{\alpha x} = 0$ y, la solución general de $u''(x) = -\beta^2 u(x)$ es $u(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x$, es decir que $\boldsymbol{y_\pm(x)} = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$, y la solución general es ahora

$$y_h(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + c_2 e^{\lambda_3 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

c) Las raíces del polinomio que son múltiples, por ejemplo el polinomio es

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1} (\lambda - \lambda_2)^{n2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{nm}$$

el operador $\hat{L}$ queda $\hat{L} = \hat{L}_1^{\,n1} \hat{L}_2^{\,n2} \ldots \hat{L}_m^{\,nm}$, donde $\hat{L}_k = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right)$, pero obviamente ahora si bien cada $\hat{L}_j^{\,nj}$ conmuta con $\hat{L}_k^{\,nk}$ para $j \neq k$, los $\hat{L}_k$, para un mismo k no conmutan entre sí. Es decir que debemos buscar $y_k(x)$ tal que $\hat{L}_k^{\,nk} [y_k(x)] = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right)^2 [y_k(x)] = 0$, como en el caso anterior proponemos $y_k(x) = u(x)\, e^{\lambda k x}$, entonces queda la ecuación $u^{(nk)}(x) = 0$, cuya solución es

$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_{nk} x^{nk-1}$, y $y_k(x) = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_{nk} x^{nk-1}]$ e $^{\lambda k x}$ y la solución general es

$$y_h(x) = \left[c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_{n1} x^{n1-1}\right]e^{\lambda_1 x} + \ldots + \left[h_1 + h_2 x + h_3 x^2 + \ldots + h_{nm} x^{nm-1}\right] e^{\lambda_m x}$$

6.6.2 Caso inhomogéneo

Se trata de buscar una solución particular, $y_{pi}(x)$, de la ecuación $\hat{L}\left[y_{pi}(x)\right] = q(x)$.

Una forma de resolver este problema es buscar un operador $\hat{L}_q$, lo más sencillo posible, tal que $\hat{L}_k\left[q(x)\right] = 0$. Aplicamos dicho operador a la expresión anterior queda $\hat{L}_q\ \hat{L}\left[y_{pi}(x)\right] = 0$, en otras palabras ahora debemos resolver una ecuación homogénea con un nuevo operador que resulta de la composición $\hat{L}_q\ \hat{L}$. En caso que ambos operadores conmuten o sea $\hat{L}_q\ \hat{L} = \hat{L}\ \hat{L}_q$, como $\hat{L}[0] = 0$, el problema se reduce a resolver $\hat{L}_q\left[y_{pi}(x)\right] = 0$, más simple que $\hat{L}_q\ \hat{L}\left[y_{pi}(x)\right] = 0$.

Para más detalles y ejemplos ver Ayres (1991), Kiseliov (1979) y Spiegel (1986).

Referencias

Arnold V.I. (1992). *Ordinary Differential Equations*. Berlin. Alemania. Springer-Verlag.

Ayres F. (1991). *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales*. Madrid. España. McGraw Hill Book Co.

Elsgoltz L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y calculo variacional*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Hildebrand, F.B. (1973). *Métodos de la matemática aplicada*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Kiseliov A., Krasnov, M. y Makarenko G. (1979). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú*. URSS. Editorial MIR.

Kreyszig, E. (1991). *Matemáticas avanzadas para ingenieros*. Volumen I. México. DF. México. Editorial Limusa.

Spiegel, M.R. (1986). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México. D.F. México. Printice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Spiegel, M.R. (1992). *Transformadas de Laplace*. México D.F. México. McGraw-Hill/Inter americana de México, S.A.

CAPÍTULO 7

Soluciones en el campo complejo

Alberto Gustavo Albesa

En tus rutas que cruzan los mares
florece una estela azul de cantares
y al conjuro de nuevos paisajes
suena intensamente tu claro cordaje
Con tu dulce sembrar de armonías
Tierras lejanas te vieron pasar
otras lunas siguieron tus huellas,
tu solo destino es siempre volar
C.Gardel, A.LePera, GOLONDRINAS.

7.1 Funciones analíticas

El problema de valores iniciales para una EDO de primer orden se puede extender al campo complejo, es decir si, siguiendo la notación canónica, reemplazamos las funciones $y(x)$ por $w(z)$ y $y'(x)$ por $w'(z)$, es decir que entonces la pregunta es sobre la existencia y unicidad del problema:

$$w'(z) = f(z, w), \qquad w(z_o) = w_o$$

En algún entorno $\Omega \subset C$ de z_o, cuando f es analítica alrededor de (z_o, w_o). Existe un teorema análogo al de Picard que asegura la existencia y unicidad de solución.

7.1.1 Teorema

Dado el problema de valores iniciales $w'(z) = f(z, w)$, $w(z_o) = w_o$; si f es analítica tanto como función de z, y como función de w en $|z - z_o| \leq a$ y $|w - w_o| \leq b$, entonces existe una única función $w = \phi(z)$ que es solución del problema y es analítica para $|z - z_o| \leq h$, con $h > 0$ donde se puede ver que $h = a\,[1 - exp(- b/ 2Ma)]$, con $M = max|f| > 0$. Ver Ince (1956).

7.1.2 Observación

La EDO implica que existe $w'(z)$ en $|z - z_o| \leq a$, por lo tanto $w(z)$ deberá ser analítica al menos en $|z - z_o| < a$. Es decir las soluciones son funciones analíticas en un entorno de z_o.

¿Qué ocurre si la EDO es lineal de orden n homogénea?. Con la notación $w^{(k)}(z) = d^k w/dz^k$ resulta:

$$w^{(n)} = p_1(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(z)\, w' + p_n(z)\, w, \qquad w^{(k)}(z_o) = w_{o,k}\,,\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Siendo cada $p_k(z)$ analítica en Ω_k con $z_o \in \Omega_k$, y se busca la solución en $\Omega \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_n$.

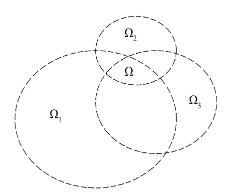


Figura 7.1 *Se busca una solución en el dominio Ω, común a todos los Ω_k.*

Por ser la solución analítica el desarrollo de Taylor da, en un entorno de z_0:

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k, \qquad a_k = w^{(k)}(z_o) / k!$$

Los primeros valores de a_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) resultan de las condiciones iniciales, los restantes de reemplazar en la EDO, es decir para $k = n$ resulta:

$$a_n = w^{(n)}(z_0) / n! = [p_1(z_0)\, w_{0,n-1} + \ldots + p_{n-1}(z_0)\, w_{0,1} + p_n(z_0)\, w_0] / n!, \text{ etc.}$$

Si se toman como condiciones iniciales $w_j^{(k)}(z_0) = \delta_{j,\, k-1}$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, con $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$, se pueden obtener n soluciones canónicas $w_1(z), \ldots, w_n(z)$, linealmente independientes.

Un enfoque muy detallado se puede ver en Ince (1956)

Antes de proseguir es bueno recordar que el producto de dos funciones analíticas en un mismo punto, es una función analítica en dicho punto, y como ambas admiten desarrollos en series de potencia alrededor de dicho punto, su producto también. Pero ¿Cómo se pueden obtener los coeficientes de dicho producto a partir de los de cada uno de las otras funciones? Es decir, por ejemplo, para simplificar tomemos alrededor del origen, y sabemos que

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, y $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, entonces si $h(x) = f(x)\, g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

La pregunta es ¿cómo dependen los c_k de a_k y b_k?

Comenzando con las potencias más bajas vemos que:

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_0$$

……………………………

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j} \;,= \sum_{j=0}^{k} b_j\, a_{k-j}$$

Ahora vamos a considerar el caso de la EDO de segundo orden lineal y adoptamos la notación de valores reales:

$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$ con $p(x)$ y $q(x)$ analíticas en x_o, es decir:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_o)^k, \qquad | x - x_0 | < r_1$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-x_o)^k, \qquad |x - x_o| < r_2$$

A este tipo de puntos los llamaremos puntos ordinarios de la ecuación diferencial, y entonces:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, \qquad |x - x_o| < r = min(r_1, r_2).$$

Pero ¿cuál es el valor de los a_k ?

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_o)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} (x-x_o)^k,$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k (x-x_o)^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} (x-x_o)^k,$$

Reemplazados en la EDO obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} (x-x_o)^k + \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x-x_o)^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} (x-x_o)^k\right] +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-x_o)^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k\right] = 0$$

Ahora se pueden efectuar los productos de la forma antes observada, y queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k+2)(k+1)\, a_{k+2} + \left[\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}\, (j+1)\, a_{j+1} + q_{k-j}\, a_j \right]\right\} (x-x_0)^k = 0$$

Como todos los coeficientes (términos entre llaves, deben ser cero, obtenemos la relación

$$(k+2)(k+1)\, a_{k+2} = -\left[\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}\, (j+1)\, a_{j+1} + q_{k-j}\, a_j \right],\ k = 0, 1, \ldots$$

que vincula linealmente al coeficiente a_{k+2}, con todos los anteriores, es decir $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$.
Como $k = 0, 1, \ldots$, todos los coeficientes a partir del a_2 serán cierta combinación lineal de los dos primeros, o sea a_0 y a_1.
La solución general queda:

$$y(x) = a_o\, y_1(x) + a_1\, y_2(x)$$

Como $a_0 = y(x_0)$, $a_1 = y'(x_0)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, son soluciones que cumplen las condiciones iniciales $y_1(x_o) = 1$, $y_1'(x_o) = 0$, $y_2(x_o) = 0$, $y_2'(x_o) = 1$. Además su wronskiano en x_0 es el determinante de la matriz identidad, es decir es distinto de cero, por lo tanto dichas soluciones son linealmente independientes y constituirán una base en el espacio de las soluciones.

7.1.3 Ejemplo:

1) La ecuación diferencial de Legendre.

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2}\, y'(x) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\, y(x) = 0 \quad \text{con} \quad x_o = 0$$

$p(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$, $q(x) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$ admiten desarrollos en serie para $|x| < 1.$

Reescribiendo

$(1 - x^2)\ y''(x) - 2\,x\,y'(x) + \alpha\,(\alpha{+}1)\,y(x) = 0$

Y reemplazando los desarrollos de $y''(x)$, $y'(x)$ e $y(x)$, se obtiene:

$a_2 = \{-\ \alpha\,(\alpha{+}1) / 2!\}\ a_0,\ a_3 = \{-\ [\alpha\,(\alpha{+}1) - 1\ 2\ ] / 3!\}\ a_1,\ a_{k+2} = \{-\ [\alpha\,(\alpha{+}1) - k\,(k{+}1)]/[(k{+}2)(k{+}1)]\}\,a_k$

Es decir que podemos continuar reemplazando recursivamente:

$a_4 = \{\alpha(\alpha{+}1)[\alpha(\alpha{+}1) - 2\ 3] / 4!\}\ a_0,\quad a_5 = \{[\alpha(\alpha{+}1) - 1\ 2\ ]\ [\alpha(\alpha{+}1) - 3\ 4\ ]/ 3!\}\ a_1.$

Entonces la solución general queda:

$$y(x) = a_0 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\,[\ \alpha(\alpha{+}1) - (2m-2)(2m-1)]\ .\ .\ .\ [\alpha(\alpha{+}1)]/\ (2m)!\ \ x^{2m} +$$

$$+\ a_1 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\,[\ \alpha(\alpha{+}1) - (2m-1)(2m)]\ .\ .\ .\ [\alpha(\alpha{+}1) - 12]/\ (2m{+}1)!\ \ x^{2m+1}$$

pues

$$a_{2m} = (-1)^m\,[\ \alpha(\alpha{+}1) - (2m-2)(2m-1)]\ .\ .\ .\ [\alpha(\alpha{+}1)]/\ (2m)!\ a_0$$

$$a_{2m+1} = (-1)^m\,[\ \alpha(\alpha{+}1) - (2m-1)(2m)]\ .\ .\ .\ [\alpha(\alpha{+}1) - 12]/\ (2m{+}1)!\ a_1$$

Si $\alpha = n$, entero positivo, el término a_{n+2} se anula y también se anulan todos los términos a_{n+2j} , por lo que ese desarrollo (de potencias pares o impares, según que n sea par o impar) se reduce a un polinomio de orden n. Estos polinomios quedan unívocamente determinados a menos de una constante, a_0 o a_1 según el caso. Si se la elige de manera que el polinomio valga 1 para $x = 1$, se tienen los llamados **polinomios de Legendre** $P_n(x)$.

Reemplazando se puede comprobar que:

$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = ½\ \ (3\,x^2 - 1),\quad P_3(x) = ½\ (5\,x^3 - 3\,x)$ y en general:

$P_n(x) = [\ 2^n\ n!\ ]^{-1}\ d^n/\,dx^n\ [\ (x^2 - 1)^n\ ]$ **Fórmula de Rodrigues.**

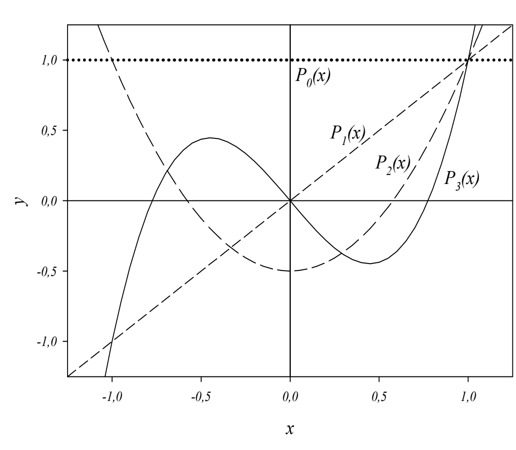


Figura 7.2 *La figura muestra los cuatro primeros polinomios de Legendre $P_l(x)$ alrededor de x = 0.*

7.1.4 Observación: A diferencia de las series, los polinomios están definidos en $-1 \leq x \leq 1$ y, excepto el primero, cada uno de ellos tiene ceros en dicha región.

7.1.5 Observación: Vimos que si x_o es un punto ordinario de la ED $y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$, es decir es un punto de analiticidad de $p(x)$ y $q(x)$, entonces es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que son analíticas en x_o.

7.1.6 La ecuación diferencial de Hermite

$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2\alpha\, y(x) = 0, \quad x_o = 0$. Reemplazando los desarrollos queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k\, a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2\alpha\, a_k x^k = 0.$$

$$[\,2a_2 + 2\alpha a_0]\, x^o + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)\, a_{k+2} + 2(\alpha - k)\, a_k\,]\, x^k = 0$$

$a_2 = -\alpha\, a_o, \qquad a_{k+2} = -2(\alpha - k) / [(k+2)(k+1)]\, a_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$ Es decir:

$a_{2k} = (-1)^k\, 2^k\, \alpha(\alpha-2) \ldots (\alpha - 2k)/(2k)!\, a_o, \qquad a_{2k+1} = (-1)^k\, 2^k\, (\alpha-1) \ldots (\alpha - 2k+1)/(2k+1)!\, a_1$

Si $\alpha = n$, entero positivo, ese desarrollo (par o impar) se reduce a un polinomio de orden n. Estos polinomios quedan unívocamente determinados a menos de una constante, a_o o a_1 según el caso. Si se elige de manera que el término de orden n sea 2^n se tienen los llamados **polinomios de Hermite** $H_n(x)$.

Reemplazando se puede comprobar que:

$H_o(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$ y en general:

$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\, d^n/dx^n\, [\exp(-x^2)\,]$.

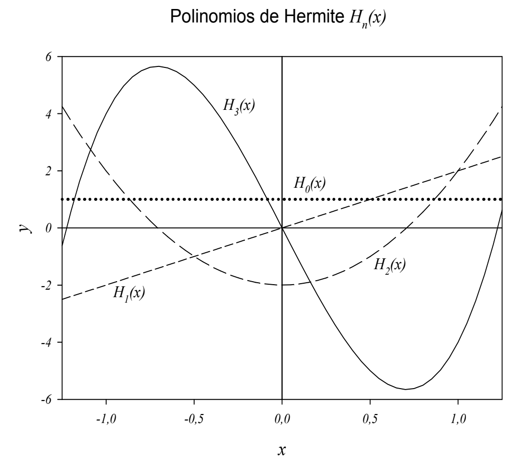


***Figura 7.3** La figura muestra los cuatro primeros polinomios de Hermite $H_n(x)$ alrededor de $x = 0$.*

7.2 Soluciones alrededor de singularidades

Hasta este momento analizamos soluciones de la ED $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$ alrededor de un punto x_o donde $p(x)$ y $q(x)$ eran analíticas. Son los denomina puntos ordinarios de dicha ecuación diferencial. Pero ¿Qué ocurre si x_o es una singularidad de $p(x)$ o de $q(x)$ o de ambas? Los puntos x_o en que ocurra esto se denominarán puntos singulares de la ecuación diferencial.

SI se desean buscar soluciones próximas a x_o, un requisito mínimo deberá ser que x_o sea un punto singular aislado de $p(x)$ o de $q(x)$ o de ambas.

Un primer abordaje al problema de buscar soluciones $y(x)$ en las proximidades de una singularidad aislada puede ser proponer que la misma como $y(x) = (x - x_0)^{\lambda}\, \phi(x)$, de manera que

el factor $(x - x_0)^\lambda$ pueda resolver las eventuales singularidades de $p(x)$ y $q(x)$ en x_0, mientras que $\phi(x)$ es analítica en x_0 y no se anula en x_0. En otras palabras la idea es proponer

$$y(x) = (x - x_0)^\lambda \phi(x) = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k ,= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{\lambda+k} , \phi(x_0) = a_0 \neq 0$$

De la misma forma se pueden calcular sus derivadas, quedando

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)\ a_k (x - x_0)^{\lambda+k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)(\lambda + k - 1) a_k (x - x_0)^{\lambda+k-2}$$

Para obtener, como en el caso de analiticidad, alguna relación de recurrencia entre los coeficientes a_k, podemos reemplazar las derivadas en la ecuación diferencial y multiplicarla por $(x - x_0)^2$, para que queden desarrollos en términos de $(x - x_0)^{\lambda+k}$, entonces se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)(\lambda + k - 1) a_k (x - x_0)^{\lambda+k} + (x - x_0)\, p(x) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)\ a_k (x - x_0)^{\lambda+k} ,+$$

$$+ (x - x_0)^2 q(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{\lambda+k} = 0$$

Para poder continuar con esta suposición tanto $(x - x_0)\, p(x)$ como $(x - x_0)^2,q(x)$ deberían admitir desarrollos en serie de potencias alrededor de x_0, es decir deberían ser analíticas en x_0, para que esto suceda, si x_0 es un punto singular, deberá a lo sumo ser un polo de orden uno de $p(x)$ y a lo sumo un polo de orden dos de $q(x)$.

En el caso que $p(x)$ tenga en x_o a lo sumo polo de orden no mayor a uno y $q(x)$ tenga en x_o a lo sumo un polo de orden no mayor a dos, el punto x_o se denominará puntos singular regular. Alrededor de un punto singular regular la ecuación diferencial $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$, puede escribirse:

$$(x - x_o)^2\, y''(x) + P(x)\, (x - x_o)\ y'(x) + Q(x)\ y(x) = 0$$

con $P(x) = (x - x_0)\, p(x)$ y $Q(x) = (x - x_0)^2,q(x)$ analíticas en x_o.

7.2.1 Teorema (Fuchs)

Si x_0 es un punto singular regular de la ecuación diferencial $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$, entonces al menos una solución admite un desarrollo alrededor de x_0 de la forma:

$$y(x) = (x - x_0)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k ,= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{\lambda+k} , a_0 \neq 0$$

Se plantea ahora encontrar alguna forma para obtener los valores de λ y de a_k, y como depende a_k con λ, es decir $a_k = a_k(\lambda)$.

7.2.2 Método de Frobenius

Existe un método, análogo al caso de los puntos ordinarios, para determinar la dependencia de $a_k = a_k(\lambda)$, una vez que se puedan obtener los valores de λ.

De acuerdo a lo antes mencionado, la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$(x-x_o)^2\, y''(x) + P(x)\,(x-x_o)\; y'(x) + Q(x)\; y(x) = 0$$

donde:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\,(x-x_o)^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k\,(x-x_o)^k, \qquad \text{y}$$

Reemplazados en la EDO obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)\,(\lambda+k-1)\,a_k\,(x-x_o)^{\lambda+k} + \Big[\sum_{k=0}^{\infty} p_k\,(x-x_o)^k\Big]\Big[\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)\,a_k\,(x-x_o)^{\lambda+k}\Big] +$$

$$+ \Big[\sum_{k=0}^{\infty} q_k\,(x-x_o)^k\Big]\Big[\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_o)^{\lambda+k}\Big] = 0$$

El primer término de cada desarrollo en serie, cuando $k = 0$, es decir el coeficiente de $(x-x_o)^\lambda$ es $[\,\lambda(\lambda-1) + p_0\,\lambda + q_0\,]a_0$, el término entre corchetes es un polinomio de segundo grado en λ, que escribiremos como $F(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + p_0\,\lambda + q_0 = \lambda^2 - (1-p_0)\,\lambda + q_0$, entonces el desarrollo, separando los términos en p_0 y q_0:

$$F(\lambda)\,a_0\,(x-x_o)^\lambda +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ [(\lambda+k)(\lambda+k-1)\,a_k + p_0\,(\lambda+k) + q_0]\,a_k + \Big[\sum_{j=1}^{k-1} (p_{k-j}\,(\lambda+j) + q_{k-j})\,a_j\Big]\Big\}\,(x-x_o)^{\lambda+k} = 0$$

Usando la definicion de la funcion F se reduce a

$$F(\lambda)\,(x-x_o)^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ F(\lambda+k)\,a_k + \Big[\sum_{j=1}^{k-1} (p_{k-j}\,(\lambda+j) + q_{k-j})\,a_j\Big]\Big\}\,(x-x_o)^{\lambda+k} = 0$$

Como todos los coeficientes deben anularse resulta

$$F(\lambda)\,a_0 = 0, \qquad F(\lambda+k)\,a_k + \Big[\sum_{j=1}^{k-1} (p_{k-j}\,(\lambda+j) + q_{k-j})\,a_j\Big] = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

como $a_0 \neq 0$ resulta $F(\lambda) = \lambda^2 - (1-p_0)\,\lambda + q_0 = (\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2) = 0$, de manera que existirán solo dos valores posibles para λ, a saber $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$. Además la relación entre coeficientes y raíces indica que $\lambda_1 + \lambda_2 = -(1-p_0)$, y $\lambda_1\,\lambda_2 = q_0$.

La segunda igualdad permite determinar a_k en función de $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, siempre que $F(\lambda+k)$ no se anule para ningún valor de k. Desarrollos similares a Bak (1969), Balanzat (1994), Courant (1953) y Kreyszig (1991).

7.2.3 Soluciones linealmente independientes

Como ya se mencionó, para que se anule el primer coeficiente $F(\lambda)\,a_o = 0$, dado que $a_o \neq 0$, resulta $F(\lambda) = 0$ que tiene dos raíces λ_1 y λ_2, para que $F(\lambda_2+k)$ no se anule debe ser $\lambda_1 \neq \lambda_2 + k$, para todo k, es decir si existe un entero m tal que $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, resulta $F(\lambda_2+m) = F(\lambda_1) = 0$, y no se puede calcular a_m para $\lambda = \lambda_2$. Podemos dividir la situación en tres casos:

1) λ_1 y λ_2 distintos y no difieren en un entero, es decir $\lambda_2 \neq \lambda_1$ y $\lambda_2 - \lambda_1$ no es entero

2) λ_1 y λ_2 iguales, es decir $\lambda_2 = \lambda_1$, que cumple $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ es entero

3) λ_1 y λ_2 distintos y difieren en un entero, es decir $\lambda_2 \neq \lambda_1$ y $\lambda_1 - \lambda_2 = m$ es entero no nulo.

Queremos ver de qué forma es posible hallar dos soluciones linealmente independientes.

Con $\lambda = \lambda_1$ tenemos, por el teorema de Fuchs, una solución $y_1(x)$ de la forma:

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \text{ con } a_o \neq 0$$

en este caso los coeficientes se pueden calcular a partir de

$$a_k = -[1/F(\lambda_1+k)]\left[\sum_{j=1}^{k-1} (p_{k-j} (\lambda_1+k-j) + q_{k-j}) a_j\right], \; k = 1, 2, \ldots$$

Recordemos que también la podemos escribir como $y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1} \phi(x)$, con ϕ analítica en x_0 y $\phi(x_0) \neq 0$.

Veamos cómo encontrar $y_2(x)$ linealmente independiente de $y_1(x)$ en cada caso.

1) Si $\lambda_1 - \lambda_2$ no es entero, no hay inconvenientes en emplear el método de Frobenius con y obtener los coeficientes, digamos b_n, o sea una solución linealmente independiente de $y_1(x)$ será:

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\lambda 2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \text{ con } b_o \neq 0$$

Donde los b_k se obtienen a partir de

$$b_k = -[1/F(\lambda_2+k)]\left[\sum_{j=1}^{k-1} (p_{k-j} (\lambda_2+k-j) + q_{k-j}) b_j\right], \; k = 1, 2, \ldots$$

Para los otros casos, $\lambda_1 - \lambda_2$ es entero, veamos que si $y_1(x)$ es una solución, otra solución $y_2(x)$, que sea linealmente independiente con $y_1(x)$, no puede ser una constante por $y_1(x)$. Por lo tanto escribimos $y_2(x) = v(x)\, y_1(x)$, además sabemos que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$, ahora queremos que $y_2(x)$, también sea solución, entonces ¿cuánto debe valer $v(x)$?. Supondremos que $v(x)$ es dos veces derivable, de manera que

$$y_2(x) = v(x)\, y_1(x)$$

$$y_2'(x) = v(x)\, y_1'(x) + v'(x)\, y_1(x)$$

$$y_2''(x) = v(x)\, y_1''(x) + 2\, v'(x)\, y_1'(x) + v''(x)\, y_1(x)$$

reemplazando en la ecuación diferencial, como $y_1(x)$ también es solución todos los términos de la derecha que multiplican a $v(x)$ se anulan, y si $y_2(x)$ es solución, se debe cumplir que:

$$y_2''(x) + p(x)\, y_2'(x) + q(x)\, y_2(x) = v''(x)\, y_1(x) + [2\, y_1'(x) + p(x)\, y_1(x)]\, v'(x) = 0$$

$$v''(x)/ v'(x) = -2\, y_1'(x)/ y_1(x) - p(x)$$

por otra parte tenemos $y_1'(x) = \lambda_1 (x - x_0)^{\lambda 1 - 1} \phi(x) + (x - x_0)^{\lambda 1} \phi'(x)$,

es decir que $y_1'(x) / y_1(x) = \lambda_1 /(x - x_0) + \phi'(x) / \phi(x)$,

entonces $2\, y_1'(x)/ y_1(x) = 2\, \lambda_1 /(x - x_0) + \phi_1(x)$, donde $\phi_1(x)$ también es analítica.

y además $p(x) = P(x) /(x - x_o) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_o)^k /(x - x_o) = p_o /(x - x_o) + \phi_2(x)$, con $\phi_2(x)$ analítica.

Reemplazando resulta: $v''(x)/ v'(x) = -(2\lambda_1 + p_o) /(x - x_o) + \phi_3(x)$, con $\phi_3(x) = -\phi_1(x) - \phi_2(x)$, analítica.

Recordando que $F(\lambda) = \lambda^2 - (1 - p_o)\, \lambda + q_o = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ se tiene entonces

$1 - p_o = \lambda_1 + \lambda_2$ es decir que $2\, \lambda_1 + p_o = 1 + \lambda_1 - \lambda_2$

2) Si $\lambda_2 = \lambda_1$, se cumple $2\, \lambda_1 + p_o = 1$, entonces

$v''(x)/v'(x) = -1/(x-x_o) + \phi_3(x)$ e integrando resulta $\log[v'(x)] = \log[1/(x-x_o)] + \Phi(x)$

es decir $v'(x) = 1/(x-x_o) \exp[\Phi(x)]$

Además $\exp[\Phi(x)] = \alpha_o + \alpha_1 (x-x_o) + \alpha 2 (x-x_o)^2 + \ldots$, con $\alpha_o = \exp[\Phi(x_o)] \neq 0$

Entonces $v(x) = \alpha_o \log(x-x_o) + \psi(x)$, con $\psi(x)$ analítica en x_o

Finalmente

$$y_2(x) = \alpha_o\ y_1(x) \log(x-x_o) + y_1(x)\ \psi(x) = \alpha_o\ y_1(x) \log(x-x_o) + (x-x_0)^{\lambda 1}\ \phi(x)\psi(x)$$

Es decir:

$$y_2(x) = \alpha_o\ y_1(x) \log(x-x_o) + (x-x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=1}^{\infty} b_k (x-x_o)^k \qquad \text{con } \alpha_o \neq 0$$

3) Si $\lambda_1 - \lambda_2 = m \neq 0$, se cumple $2\ \lambda_1 + p_o = 1+m$, entonces

$v''(x)/v'(x) = -(1+m)/(x-x_o) + \phi_3(x)$ e integrando resulta $\log[v'(x)] = \log[1/(x-x_o)^{m+1}] + \Phi(x)$

es decir $v'(x) = 1/(x-x_o)^{m+1} \exp[\Phi(x)]$, como antes $\exp[\Phi(x)] = \alpha_o + \alpha_1 (x-x_o) + \alpha 2 (x-x_o)^2 + \ldots$

Entonces $v(x) = \alpha_m \log(x-x_o) + (x-x_0)^{-m}\ \psi(x)$, con $\psi(x)$ analítica en x_o y $\psi(x_0) = \alpha_o \neq 0$

Finalmente

$$y_2(x) = \alpha_m\ y_1(x) \log(x-x_o) + y_1(x)\ (x-x_0)^{-m}\ \psi(x) = \alpha_m\ y_1(x) \log(x-x_o) + (x-x_0)^{\lambda 1-m}\ \phi(x)\psi(x)$$

Es decir:

$$y_2(x) = \alpha_m\ y_1(x) \log(x-x_o) + (x-x_0)^{\lambda 2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_o)^k$$ con $b_o \neq 0$, pero α_m puede ser cero.

7.2.4 La ecuación diferencial de Gauss

$$x\, y''(x) + (\gamma - x)\, y'(x) - \alpha\ y(x) = 0, \quad x_o = 0, \quad \gamma \text{ no es entero}$$

$p(x) = -1 + \gamma / x$, $q(x) = -\alpha / x$, de manera que $x_o = 0$ es un punto singular regular.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1)\, a_k x^{\lambda+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma\, (\lambda+k)\, a_k x^{\lambda+k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)\, a_k x^{\lambda+k} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha\, a_k x^{\lambda+k} = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda+k)(\lambda+k-1+\gamma)]\, a_k x^{\lambda+k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k+\alpha)\, a_k x^{\lambda+k} = 0.$$

$$\lambda\, (\lambda-1+\gamma)\, a_o x^{\lambda-1} - \sum_{k=0}^{\infty} [\, (\lambda+k+1)(\lambda+k+\gamma)\, a_{k+1} - (\lambda+k+\alpha)\, a_k]\, x^{\lambda+k} = 0.$$

$\lambda\, (\lambda-1+\gamma)\, a_o = 0$ por lo tanto $\lambda\, (\lambda-1+\gamma) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 - \gamma$ no es entero y $a_{k+1} = (\lambda+k+\alpha) / [(\lambda+k+1)(\lambda+k+\gamma)]\, a_k$, $k = 0, 1, \ldots$

a) $\lambda_1 = 0$

$$a_{k+1} = (k+\alpha) / [(k+1)(k+\gamma)]\, a_k \,, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$a_1 = (\alpha / \gamma)\, a_o$, $a_2 = \alpha(\alpha+1) / [2!\, \gamma\, (\gamma+1)]\, a_o$, $\ldots$, $a_k = [\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+k-1)]/[k!\, \gamma\, (\gamma+1) \ldots (\gamma+k-1)]\, a_o$

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+k-1)]/[\, k!\, \gamma(\gamma+1) \ldots (\gamma+k-1)]\, x^k = G(\alpha, \gamma, x)$$, definición.

b) $\lambda_1 = 1 - \gamma$

$b_{k+1} = (k+\alpha+1-\gamma) / [(k+1)(k+2-\gamma)]\, b_k$, , $k = 0, 1, \ldots$

Esta relación es la misma que la anterior, donde α pasó a $\alpha+1-\gamma$, y γ pasó a $2-\gamma$, de manera que resulta entonces

$y_2(x) = x^{1-\gamma}\ G(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, x)$

7.2.5 La ecuación diferencial de Laguerre

Si en la ecuación anterior tomamos $\gamma = 1$ y $\alpha = -\beta$, queda

$x\,y''(x) + (1-x)\,y'(x) - \beta\, y(x) = 0, \qquad x_o = 0.$

Ahora $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, Una de las soluciones se obtiene reemplazando en el caso a) anterior $\gamma = 1$, $\alpha = -\beta$, quedando la solución

$a_{k+1} = (k-\beta) / (k+1)^2\, a_k = [(-\beta)(1-\beta)\ldots(k-1-\beta)] / [(k+1)!]^2\, a_o$, es decir:

$a_k = [(-\beta)(1-\beta)\ldots(k-1-\beta)] / (k!)^2\, a_o$, y entonces:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-\beta)(1-\beta)\ldots(k-1-\beta)] / (k!)^2\ x^k$$

Se deja como ejercicio calcular $y_2(x)$ linealmente independiente de $y_1(x)$ a partir de la expresión dada en 2) cuando λ_1 y λ_2 son iguales, es decir $\lambda_2 = \lambda_1$.

Es interesante ver qué sucede si $\beta = n$, un entero no negativo, ya que la relación queda ahora $a_{k+1} = (k-n) / (k+1)^2\, a_k$, haciendo que la serie $y_1(x)$ se reduzca a polinomios de orden n. Estos polinomios quedan unívocamente determinados a menos de una constante. Si se elige de manera que el polinomio valga $n!$ para $x = 0$, se tienen los llamados polinomios de Laguerre $L_n(x)$.

Reemplazando se puede comprobar que:

$L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1-x$, $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$, y en general:

$L_n(x) = \exp(x)\, d^n/dx^n\, [\, x^n \exp(-x)\,]$.

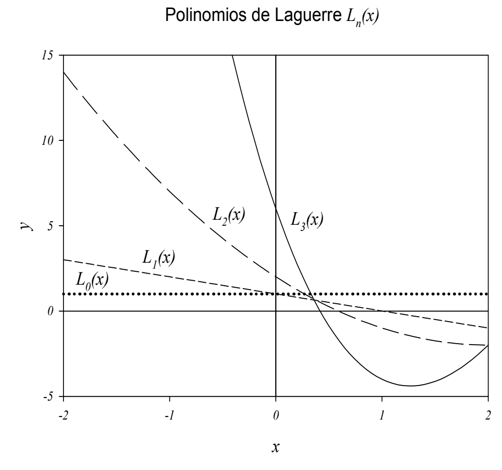


Figura 7.4 *La figura muestra los cuatro primeros polinomios de Laguerre $L_l(x)$ alrededor de $x = 0$.*

7.2.6 La ecuación diferencial de Bessel

$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + (x^2 - \nu^2)\, y(x) = 0, \quad x_0 = 0,$

como

$p(x) = 1/x, \quad q(x) = 1-\nu^2/x^2, \quad x_0 = 0$ es singular regular.

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda+k)(\lambda+k-1) + (\lambda+k) - \nu^2]\, a_k\, x^{\lambda+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{\lambda+k+2} = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda+k)^2 - \nu^2]\, a_k\, x^{\lambda+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{\lambda+k+2} = 0.$$

$$(\lambda^2 - \nu^2)\, a_0\, x^{\lambda} + [(\lambda+1)^2 - \nu^2]\, a_1\, x^{\lambda+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{[(\lambda+k)^2 - \nu^2]\, a_k + a_{k-2}\}\, x^{\lambda+k} = 0.$$

$(\lambda^2 - \nu^2)\, a_0 = 0$, $\lambda^2 - \nu^2 = 0$, $\lambda_1 = \nu$, $\lambda_2 = -\nu$

$[(\lambda+1)^2 - \nu^2]\, a_1 = (2\lambda+1)\, a_1 = 0$, a menos que $\lambda = ½$ debe ser $a_1 = 0$.

$a_k = -[(\lambda+k)^2 - \nu^2]^{-1}\, a_{k-2}$, $k = 2, 4, 6 \ldots$ Serie par.

a) $\lambda_1 = \nu$, $a_{2k} = -[(2k+\nu)^2 - \nu^2]^{-1}\, a_{2k-2} = -[4k\,(k+\nu)]^{-1}\, a_{2k-2}$

$a_2 = -[4(\nu+1)]^{-1} a_0$, $a_4 = -[2^4\, 2\,(\nu+1)(\nu+2)]^{-1}\, a_0$, $a_6 = -[2^6\, 3!\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)]^{-1}\, a_0$

$a_{2k} = (-1)^k\, [2^{2k}\, k!\,(\nu+1)\ldots(\nu+k)]^{-1}\, a_0$

$$y_1(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, [2^{2k}\, k!\,(\nu+1)\ldots(\nu+k)]^{-1}\, x^{\nu+2k}$$

Con la transformada de Laplace se puede establecer una generalización del factorial, pues si

$$F(s) = \mathcal{L}\{x^n\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, x^n\, dx = n!\,/\,s^{(n+1)}.$$

haciendo $s = 1$ queda $F(1) = n!$, y de esta forma se define la función gama $\Gamma(\nu)$ como:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt, \quad \text{resulta } \Gamma(n+1) = n!$$

además $\Gamma(\nu+1) = \nu\,\Gamma(\nu)$ y cuando $\nu \to -m$, entonces $|\Gamma(\nu)| \to +\infty$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$

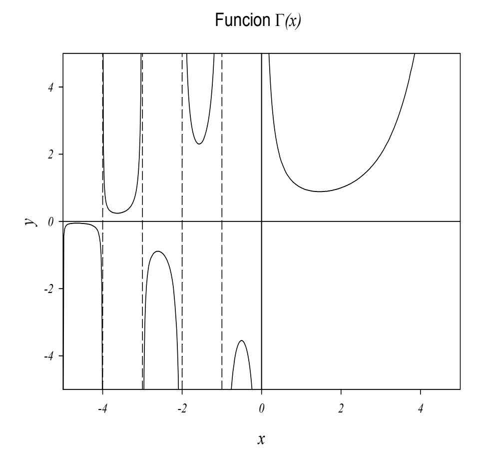


Figura 7.5 *La función $\Gamma(x)$ mostrando singularidades para $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$.*

Si se toma $a_0 = [2^{\nu}\,\Gamma(\nu)]^{-1}$, se tiene la función de Bessel $J_\nu(x)$ de orden ν dada por

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, [\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+1+\nu)]^{-1}\, (x/2)^{\nu+2k}$$

1) Si $\lambda_2 - \lambda_1$ no es entero, es decir ν no es entero, la otra solución es

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, [\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+1-\nu)]^{-1}\, (x/2)^{-\nu+2k}$$

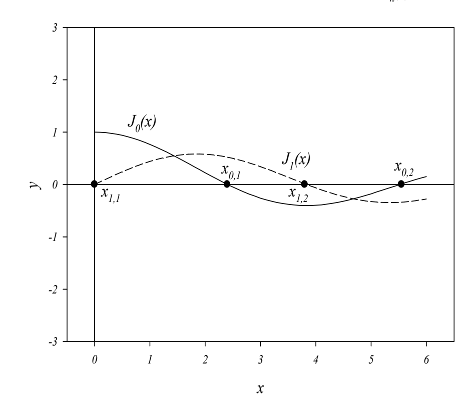
2) Si $\lambda_2 = \lambda_1$, es decir $\nu = 0$, una solución queda:

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (k!)^{-2} \, ({}^{x}\!/_{2})^{2k}$$

Llamada función de Bessel de orden cero de 1ª especie.

La otra solución linealmente independiente se obtiene como se indicó en 2) y es:

$$y_2(x) = J_0(x) \log x + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} (k!)^{-2} \, c_k \, ({}^{x}\!/_{2})^{2k} \text{ , con } c_k = 1 + ½ + \ldots + {}^{1}\!/_{k}$$



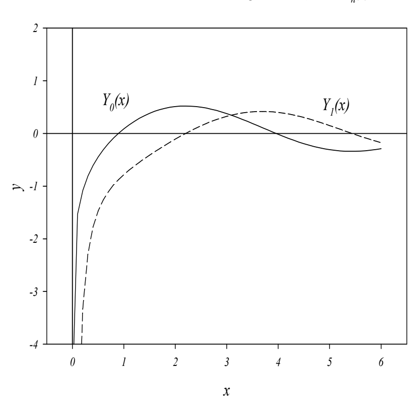


Figura 7.7 *Las dos primeras funciones de Bessel de primera especie, mostrando sus ceros.*

Figura 7.8 *Las dos primeras funciones de Bessel de segunda especie.*

Sin embargo se usa otra función, que también es linealmente independiente con $y_1(x)$ definida como.

$$y_2(x) = Y_0(x). = (2/\pi)\{ J_0(x).[\log (x/2) + \gamma\,] + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} (k!)^{-2} \, c_k \, ({}^{x}\!/_{2})^{2k} \},$$

Llamada función de Bessel de orden cero de 2ª especie. Aquí se ha usado el número γ que se define como el límite de $(c_k - \ln k)$ cuando $k \to \infty$.

Es interesante conocer el comportamiento de $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ cuando x toma valores próximos a cero o muy grandes, los mismos son:

$$J_0(x) \approx \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4}, & \text{si } |x| << 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4} \right), & \text{si } |x| >> 1 \end{cases} , \quad Y_0(x) \approx \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\log\left(\dfrac{x}{2} \right) + \gamma \right), & \text{si } |x| << 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \; sen\left(x - \dfrac{\pi}{4} \right), & \text{si } |x| >> 1 \end{cases}$$

3) Si $\lambda_2 - \lambda_1$ entero, es $2\nu = n$, por ejemplo $\nu = m$. $y_1(x) = J_m(x)$, pero $J_{-m}(x)$ que es el límite de $J_{-\nu}(x)$ cuando $\nu \to m$. Como vimos que $|\Gamma(k-\nu+1)| \to \infty$ cuando $\nu \to m$, si $k \le m - 1$. Queda:

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \, [\, \Gamma(k+1)\, \Gamma(k-m+1)]^{-1} \, ({}^{x}\!/_{2})^{2k-m} =$$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, [\, \Gamma(k+m+1)\, \Gamma(k+1)]^{-1} \, ({}^{x}\!/_{2})^{2k+m} = (-1)^m J_m(x)$$

es decir que $J_m(x)$ y $J_{-m}(x)$ no son linealmente independientes.

Entonces la otra solución, para el caso genérico $\lambda_2 - \lambda_1 = 2\nu$ entero es de la forma:

$$y_2(x) = \alpha\, J_\nu(x)\, \ln x + x^{\nu+n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k,$$

Recordemos que eventualmente puede ser $\alpha = 0.$

De la misma forma se pueden definir funciones $Y_m(x)$ linealmente independientes de $J_m(x)$ a partir de la definición:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\, \cos \nu\pi - J_{\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi}, \text{ las funciones } Y_m(x) = \lim_{\nu\to m} Y_\nu(x)$$

Cuyos comportamientos asintóticos son;

$$J_m(x) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^m, & \text{si } |x| << 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\, \cos\left(x - (2m+1)\dfrac{\pi}{4}\right), & \text{si } |x| >> 1 \end{cases}, \quad Y_m(x) \approx \begin{cases} -\dfrac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^m, & \text{si } |x| << 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\, \operatorname{sen}\left(x - (2m+1)\dfrac{\pi}{4}\right), & \text{si } |x| >> 1 \end{cases}$$

7.2.8 Ejemplo: Caso $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$ entero. Por ejemplo la ED: $x^2 y''(x) + x\, y'(x) + (x^2 - ¼)\, y(x) = 0.$

$\lambda^2 = ¼$, $\lambda_1 = ½$, $\lambda_2 = -½$,

Cabe recordar que para $\lambda = -½$ podía existir una solución con serie impar

Para $\lambda_1 = ½$ resulta

$$a_{k+2} = -[(k+2)(k+3)]^{-1}\, a_k$$

$$a_2 = -1/3!\, a_0,\ a_4 = 1/5!\, a_0, \ldots\ a_{2k} = (-1)^k/(2k+1)!\, a_0$$

$$y_1(x) = a_0 \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)!\, x^{2k} = a_0\, (1/\sqrt{x}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)!\, x^{2k+1} = a_0\, \operatorname{sen} x / \sqrt{x}$$

$$y_2(x) = \alpha\, y_1(x)\, \ln x + (1/\sqrt{x}) \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k = \alpha\, y_1(x)\, \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k/\sqrt{x}$$

calculando $y_2'(x)$ e $y_2''(x)$ y reemplazando en la ED resulta:

$$2\,\alpha\, x\, y_1'(x) + \sum_{k=0}^{\infty} [k\,(k-1)\, b_k + b_{k-2}]\, x^k/\sqrt{x} = 0.$$

Pero $y_1(x) = \operatorname{sen} x / \sqrt{x} = x^{½} - x^{3/2}/3! + x^{5/2}/5! + \ldots$

$$y_1'(x) = ½\, x^{-½} - {}^3/_2\, x^{½}/3! + {}^5/_2\, x^{3/2}/5! + \ldots$$

$$x\, y_1'(x) = ½\, x^{½} - {}^3/_2\, x^{3/2}/3! + {}^5/_2\, x^{5/2}/5! + \ldots$$

Como la serie comienza en $x^{3/2}$ ($k = 2$) debe ser $\alpha = 0.$ Entonces

$$b_{k+2} = -[(k-1)\, k]^{-1}\, b_k$$

$$b_2 = -1/2!\, b_0,\ b_4 = 1/4!\, b_0, \ldots\ b_{2k} = (-1)^k\, 1/(2k)!\, b_0$$

$$y_2(x) = b_0\ 1/\sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k)!\ x^{2k} = b_0\, \cos x/\sqrt{x}$$

Vemos pues que ninguna de las dos soluciones contiene logaritmos. Ver mas ejemplos en Kiseliov (1979) y Spiegel (1986).

7.2.9 Observación 1:

A partir de la ecuación diferencial de Bessel $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$, se puede definir la forma general de la misma dada por $x^2 y'' + x y' + (k^2x^2 - \nu^2) y = 0$.

Podemos ver que mediante el cambio de variables $t = k x$, esta última se transforma en la primera, por lo tanto las soluciones serán $y(x) = c_1 J_\nu(kx) + c_2 J_{-\nu}(kx)$, y en el caso que $\nu = m$, obviamente obtenemos $y(x) = c_1 J_m(kx) + c_2 Y_m(kx)$.

7.2.10 Observación 2:

Empleando el mismo argumento de la observación anterior se pueden analizar las soluciones de $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$, considerando en este caso $k = i$, se obtienen soluciones que para $\nu = m$, son:

$$y_1(x) = I_m(x) = e^{i\,\pi/2} J_m(x), \qquad y_2(x) = K_m(x) = \lim_{\nu\to m} \pi \frac{[I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)]}{sen\,\nu\,\pi}$$

Donde $I_m(x) \geq 0$, es estrictamente creciente e $I_m(x) \to \infty$ si $x \to \infty$, mientras que $K_m(x) \geq 0$, es estrictamente decreciente y $K_m(x) \to \infty$ si $x \to 0$.

Análogamente la solución de $x^2 y'' + x y' - (k^2x^2 + m^2) y = 0$, es $y(x) = c_1 I_m(kx) + c_2 K_m(kx)$.

7.3 Soluciones alrededor de singularidades 2

Se había planteado la siguiente inquietud: Así como habíamos visto, a través del método de Frobenius, como obtener dos soluciones linealmente independientes de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, alrededor de x_0 cuando dicho punto es un polo de $p(x)$, de $q(x)$, o de ambas, entonces ¿Qué ocurre si x_0 es simplemente una singularidad aislada de $p(x)$, de $q(x)$ o de ambas? Esta situación es analizada de manera muy interesante en una notas del Profesor V.I. Smirnov que resumimos a continuación.

Si $x_0 \in \Omega$ un dominio, y f es analítica en el disco $|x - x_0| < r_0$, interior a Ω, o sea que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k,$$

y tomamos otro punto x_1 en dicho disco, a su vez existirá otro disco $|x - x_1| < r_1$, en Ω donde habrá otra serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, (x - x_0)^k,$$

que converge y además coincide con f en la región común a ambos discos. A la función definida sobre la unión de ambos discos que coincide con f en el primero y con la serie en el segundo, y que obviamente es analítica, se la denomina prolongación analítica de f. De esta forma se pueden seguir tomando otros puntos $x_2, x_3, \ldots$ sobre una curva simple dentro de Ω, y a través de los sucesivos discos extender la función al resto de Ω.

¿Siempre es posible hacer esto? ¿Qué pasa si atraviesa o gira alrededor de un punto de ramificación?

Por ejemplo si $f(x) = Log\ x = ln|x| + i\ Arg\ x$, cuando se gira una vuelta completa en sentido horario alrededor de 0, la función se transforma en $f^+(x) = Log\ x + 2\pi i$.

7.3.1 La fórmula de Abel

Si y_1 e y_2 son dos soluciones de $y''(x) + p(x)\ y'(x) + q(x)\ y(x) = 0$, en un dominio simplemente conexo Ω, entonces vimos la relación $W(x) = W(x_0) \exp[-\int p(\zeta)\ d\zeta]$, donde $W(x) = y_2'(x)\ y_1(x) - y_1'(x)\ y_2(x)$, por tanto $(y_2/y_1)' = W(x)/[y_1(x)]^2 = W(x_0)/[y_1(x)]^2 \exp[-\int p(\zeta)\ d\zeta]$ y entonces si y_1 e y_2 son linealmente independientes en un entorno de x_0, deben ser linealmente independientes en todo Ω, ya que $W(x_0) \neq 0$.

7.3.2 Teorema

Si x_0 es un punto ordinario de $y''(x) + p(x)\ y'(x) + q(x)\ y(x) = 0$, es decir $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en x_0, entonces el correspondiente problema de valores iniciales, tiene solución única que es analítica en el disco $|x - x_0| < r$ donde r es el menor de los discos de analiticidad de $p(x)$ y $q(x)$. En particular existen dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ analíticas y linealmente independientes en tal disco, de manera tal que toda solución $y(x)$ puede escribirse como $y(x) = c_0\ y_1(x) + c_1\ y_2(x)$.

Si $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en un dominio simplemente conexo Ω, existirán $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones linealmente independientes en un disco dentro de Ω.

Si ahora tomamos las prolongaciones analíticas de ambas funciones, ¿Siguen siendo linealmente independientes en todo Ω?

Si pues como $W(x_0) \neq 0$ resulta que $(y_2/y_1)' \neq 0$ en todo $x \in \Omega$ que puede conectarse a x_0 por una curva suave interior a Ω. ¿Qué pasará si Ω no es simplemente conexo? Por ejemplo ¿Qué pasa si x_0 es un punto singular aislado de $p(x)$ o de $q(x)$? Tenemos los desarrollos de Laurent

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\ (x - x_0)^k \qquad \text{para } 0 < |x - x_0| < r_1,$$

$$q(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k\ (x - x_0)^k \qquad \text{para } 0 < |x - x_0| < r_2$$

Consideremos ahora la corona (disco perforado) $0 < |x - x_0| < r = min(r_1, r_2)$ ¿Podemos prolongar una solución analítica dentro de la corona? Si elegimos una curva que no rodee a x_0 sí, porque en general x_0 es un punto de ramificación. Entonces cortemos la corona en la dirección de un radio, ahora nos queda una región simplemente conexa. Si tomamos dos soluciones $y_a(x)$ e $y_b(x)$ analíticas , linealmente independientes en dicha región, después de girar una vuelta en sentido antihorario pasan a ser $y_a^+(x)$ e $y_b^+(x)$. Ambas deben ser soluciones de la ecuación diferencial pues $p(x)$ y $q(x)$ no cambian, de manera que:

$$y_a^+(x) = a_{11}\ y_a(x) + a_{12}\ y_b(x)$$

$$y_b^+(x) = a_{21}\ y_a(x) + a_{22}\ y_b(x)$$

donde $a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21} \neq 0$, sino después de girar y_b^+ sería una constante por $y_a^+(x)$, es decir serían linealmente dependientes.

Veamos si podemos encontrar soluciones simples $y(x)$ y tales que al girar sean $y^+ = \mu\, y$, donde μ es una constante. Si existe $y(x)$ la podemos escribir como $y(x) = b_1\, y_a(x) + b_2\, y_b(x)$, y debemos determinar b_1 y b_2, o sea al girar es

$$y^+(x) = b_1\, y_a^+(x) + b_2\, y_b^+(x) = a_{11}\, b_1\, y_a(x) + a_{12}\, b_1\, y_b(x) + a_{21}\, b_2\, y_a(x) + a_{22}\, b_2\, y_b(x) =$$

$$= \mu\, y(x) = \mu\, b_1\, y_a(x) + \mu\, b_2\, y_b(x)$$

Como $y_a(x)$ e $y_b(x)$ son linealmente independientes queda:

$$(a_{11} - \mu)\, b_1 + a_{12}\, b_2 = 0$$

$$a_{21}\, b_1 + (a_{22} - \mu)\, b_2 = 0$$

Para que existan soluciones b_1 y b_2 no triviales (no nulas), el determinante del sistema debe ser cero, que podemos abreviarlo como $(\mu - \mu_1)\,(\mu - \mu_2) = 0$. Luego con y se calculan los respectivos b_1 y b_2.

Si $\mu_2 \neq \mu_1$ entonces es posible encontrar dos soluciones y_1 e y_2 tales que $y^+ = \mu\, y$, que deben ser linealmente independientes, porque sino y_2/y_1 sería una constante, pero al girar una vuelta alrededor de x_0 queda $y_2^+/y_1^+ = (\mu_2/\mu_1)\,(y_2/y_1) \neq y_2/y_1$, absurdo porque una constante no debe cambiar en el giro.

Ahora podemos introducir los números dados por $\lambda_1 = 1/(2\pi i)\, Log(x_1)$, $\lambda_2 = 1/(2\pi i)\, Log(x_2)$, y las funciones $(x - x_0)^{\lambda 1} = exp[\lambda_1\, Log(x - x_0)]$, $(x - x_0)^{\lambda 2} = exp[\lambda_2\, Log(x - x_0)]$. Al girar todo una vuelta alrededor de x_0, en sentido positivo, estas funciones quedan multiplicadas por $exp(\lambda_1 2\pi i) = \mu_1$, $exp(\lambda_2 2\pi i) = \mu_2$, respectivamente. Por lo tanto las funciones $y_1(x)\,/(x - x_0)^{\lambda 1}$ e $y_2(x)\,/(x - x_0)^{\lambda 2}$ no cambian al girar alrededor de x_0 y además son analíticas en la corona $0 < |x - x_0| < r$, por lo tanto admiten desarrollos de Laurent

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k \qquad (1.a)$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\lambda 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\,(x - x_0)^k \qquad (1.b)$$

¿Qué pasa ahora si $\mu_2 = \mu_1$?

En los desarrollos no cambian si se modifica $Log\, \mu$ por $Log\, \mu + m\, 2\pi i$, con m entero, o sea λ_1 y λ_2 están definidos a menos de un entero. Entonces por lo menos se tiene una solución y_1 tal que $y_1^+ = \mu_1\, y_1$.

Tomemos otra solución linealmente independiente y_2 tal que $y_2^+ = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2$, además la expresión $y_1^+ = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 = \mu\, y_1$, es decir $a_{11} = \mu$, $a_{12} = 0$.

El determinante

$$\begin{vmatrix} \mu_1 - \mu & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{vmatrix} = (\mu - \mu_1)^2$$

por lo tanto $a_{22} = \mu_1$ y entonces $y_2^+ = a_{21}\, y_1 + \mu\, y_2$ o sea $y_2^+/y_1^+ = a_{21}/\mu_1 + y_2/y_1$

Es decir que la función $y_2/y_1 - a_{21}\,/(2\pi i\, \mu_2)\, Log\,(x - x_0) = y_2/y_1 - a\, Log\,(x - x_0)$ admite un desarrollo de Laurent en la corona $0 < |x - x_0| < r$, y ahora en lugar de (1) tenemos las ecuaciones

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k, \qquad (2.a)$$

$$y_2(x) = a\, y_1(x)\, Log(x - x_0) + (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, (x - x_0)^k \qquad (2.b)$$

7.3.3 Teorema

Si x_0 es un punto singular aislado (no evitable) de $p(x)$, de $q(x)$, o de ambas, entonces existen dos soluciones linealmente independientes que pueden expresarse como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de acuerdo a los desarrollos de (1) o (2) en una corona $0 < |x - x_0| < r$.

7.3.4 Observación: En la ecuación (2.b) puede ocurrir que $a = 0$ ($a_{21} = 0$) en cuyo caso (2.b) se reduce a (1.b).

Estos argumentos teóricos no nos permiten obtener los desarrollos (1) y (2). Para poder aplicar un método (como en el caso de los puntos ordinarios) debemos restringirnos al caso en que $p(x)$ y $q(x)$ tengan solo un número finito de potencias negativas (polos), de esa forma llegamos a que x_0 es un punto singular regular.

Como ya se señaló (1) y (2) no cambian si se modifica λ_1 por $\lambda_1 + m_1$ y λ_2 por $\lambda_2 + m_2$, con m_1 y m_2 enteros, podemos escribir

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k\ , \qquad a_0 \neq 0 \qquad (1\text{-}1.a)$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\lambda 2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, (x - x_0)^k, \qquad b_0 \neq 0 \qquad (1\text{-}1.b)$$

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, (x - x_0)^k\ , \qquad a_0 \neq 0 \qquad (2\text{-}2.a)$$

$$y_2(x) = a\, y_1(x)\, Log(x - x_0) + (x - x_0)^{\lambda 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\, (x - x_0)^k, \quad b_0 \neq 0 \qquad (2\text{-}2,b)$$

Si y_1 e y_2 son dos funciones analíticas, linealmente independiente en una cierta región, es posible encontrar $p(x)$ y $q(x)$ de manera que sean solución de $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y_1'\, p(x) + y_1\, q(x) = -\, y_1'' \\ y_2'\, p(x) + y_2\, q(x) = -\, y_2'' \end{cases}$$

se obtiene $p(x) = -\,[\, y_2''\, y_1 - y_1''\, y_2\,] \,/\, [\, y_2'\, y_1 - y_1'\, y_2\,] = -\, W'(x)/W(x)$ y $q(x) = -\, y_1''/y_1 - p(x)\, y_1'/y_1$.

Ahora ¿qué pasa si x_0 es un punto singular regular y consideramos la corona $0 < |x - x_0| < r$.?

Si $\lambda_2 \neq \lambda_1$, $y_1(x) = (x - x_0)^{\lambda 1}\, \varphi_1(x)$, $y_2(x) = (x - x_0)^{\lambda 2}\, \varphi_2(x)$, con $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ analíticas e $y(x_0) \neq 0$, por lo tanto $y_2/y_1 = (x - x_0)^{\lambda 2 - \lambda 1}\, \varphi_3(x)$, y $W'(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)\, (x - x_0)^{\lambda 2 + \lambda 2 - 2}\, \varphi_4(x) + (x - x_0)^{\lambda 2 + \lambda 2 - 1}\, \varphi_4'(x)$, y como $p(x) = -\, W'(x)/W(x) = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \,/\, (x - x_0) + \varphi_4'(x) \,/\, \varphi_4(x)$ tiene a lo sumo un polo de orden uno.

Como y_1'/y_1 no puede contener más que un polo de orden uno, e y_1''/y un polo de orden dos, resulta entonces que $q(x) = -\, y_1''/y_1 - p(x)\, y_1'/y_1$ no tiene más que a lo sumo un polo de orden dos. Ver más detalles en Smirnov (1964).

Referencias

Balanzat, M. (1994). *Matemática avanzada para la física*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Bak T.A. y Lichtenberg J. (1969). *Series, ecuaciones diferenciales, funciones complejas y análisis numérico*. Barcelona. España. Editorial Reverté, S.A.

Courant, R. y Hilbert D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Volume I. New York. E.U.A. Interscience Publishers Inc.

Ince, E.L. (1956). *Ordinary differential equations*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Kiseliov A., Krasnov, M. y Makarenko G. (1979). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú*. URSS. Editorial MIR.

Kreyszig, E. (1991). *Matemáticas avanzadas para ingenieros*. Volumen I. México. DF. México. Editorial Limusa.

Smirnov, V.I. (1964). *A course of Higher Mathematics*. Oxford. Reino Unido. Pergamon Press.

Spiegel, M.R. (1986). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México. D.F. México. Printice-Hall Hispanoamericana, S.A.

CAPÍTULO 8

Notas sobre espacios euclídeos

Alberto Gustavo Albesa

Vamos subiendo la cuesta
que arriba la noche
se viste de fiesta;
vamos que arrullan los fueyes
y al ritmo de un tango
Recuerdos nos llueven…
Veo pasara Don Juan y El Cachafaz
y a El Entrerriano montando El pangaré,
con La Morocha argentina y la casquivana Ivette...
T.Ribero, L. Diaz Velez; LA MILONGA Y YO.

8.1 Espacio métrico

Un espacio métrico es un conjunto A sobre el que hay definida una distancia (métrica) es decir una función

$$d: A \times A \to R$$
$$(a,b) \to d(a,b)$$

con las propiedades

1) $d(a,b) \geq 0$, y $d(a,b) = 0$ sii $b = a$

2) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

3) $d(a,b) = d(b,a)$

En un espacio métrico se define entorno de radio r (real positivo) de un punto a_0 al conjunto definido por $\Delta(a_0, r) = \{ a \,/\, a \in A$ y $d(a,a_0) < r \}$.

Sobre todo espacio métrico se puede decir que una sucesión $\{a_n\}$ converge a un punto a, cuando se cumple $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ y escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Sobre un mismo conjunto A se pueden definir distintas distancias (métricas)

8.1.1 Ejemplo:

En el espacio $R^2 = \{(x_1,x_2) \,/\, x_1 \in R,\ x_2 \in R\}$, dados dos puntos $x = (x_1,x_2)$, e $y = (y_1,y_2)$ podemos definir las distancias:

a). $d_1(x,y) = \sqrt{[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]}$

b) $d_2(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$

c) $d_3(x,y) = max\ \{ |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2| \}$

Ahora se plantea el problema si dichas métricas son equivalentes, es decir si toda sucesión que converge en una métrica, también converge en la otra, y viceversa. Para que valga esto basta probar que para todo entorno de un punto en una métrica, siempre existe otro entorno del mismo punto en la otra métrica (quizás con distinto radio) que se encuentre incluido en el primero, y viceversa. En este caso los entornos son círculos de radio r, rombos de diagonal 2r, y cuadrados de lado 2r, entonces las tres son equivalentes. ¿Siempre pasará esto?. Tenemos fuertes indicios para dudarlo, al menos si recordamos en el conjunto de las funciones reales y continuas definidas en un intervalo cerrado, allí existían la convergencia puntual y uniforme, que no eran equivalentes.

8.2 Notas sobre espacios lineales (vectoriales)

Un espacio lineal (vectorial) X sobre un cuerpo (escalares) K (R o C), es un conjunto X sobre el que hay definidas las operaciones de suma y de producto por escalares de K:

I) suma

$X \times X \to X$

$(x,y) \to x+y$

Propiedades

1) $x+(y+z) = (x+y)+z \quad \forall\, x\in X\ \forall\, y\in X\ \forall\, z\in X$

2) $\exists\ 0\in X\ /\ x+0 = 0+x = x \quad \forall\, x\in X$

3) $\forall\, x\in X\ \exists\ (-x)\in X\ /\ x+(-x) = (-x)+x = 0$

4) $x+y = y+x \quad \forall\, x\in X\ \forall\, y\in X$

II) producto por escalares de K

$K \times X \to X$

$(\alpha, x) \to \alpha x$

Propiedades

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

2) $1\,x = x$

III) mixtas

1) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$

Vemos que entonces $0\,x = 0$, ya que $0\,x + x = 0\,x + 1\,x = (0+1)\,x = 1\,x = x$

Además $(-1)\,x = -x$, pues $(-1)\,x + x = (-1)\,x + 1\,x = 0\,x = 0$.

Un conjunto $A \subset X$ es linealmente independiente (l.i.) sii $\forall\ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$, $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ tiene solución única ($\alpha_k = 0\ \forall k$).

Un conjunto $A \subset X$ es linealmente dependiente (l.d.) sii no es l.i., es decir $\exists\ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$ y escalares $\{\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0\}$ no todos nulos, tal que $\alpha_1^0 x_1 + \ldots + \alpha_n^0 x_n = 0$.

Si existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ l.i. pero todo conjunto de $n+1$ elementos es l.d. diremos que la dimensión de X es n. Escribimos $dim(X) = n$

Si para todo n siempre es posible encontrar un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, l.i. diremos que la dimensión de X es infinita. $dim(X) = \infty$

Un conjunto $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ es una base de X si es l.i. y todo elemento $x \in X$ se puede escribir $x = \sum \alpha_n x_n$, para ciertos escalares $\alpha_n \in K$.

En un espacio vectorial cualquiera no podemos, en principio, definir una distancia, a menos que le agreguemos alguna condición extra.

8.3 Espacios normados

Un espacio normado es un espacio vectorial X sobre el que hay definida una función de X en R llamada norma

$$\| \ \| : X \to R$$

$$x \to \| x \|$$

que cumple las propiedades:

1) $\| x \| \geq 0$ y $\| x \| = 0$ sii $x = 0$

2) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

3) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$

Un espacio normado es métrico con definir la distancia como $d(x,y) = \| y - x \|$

Dado que un espacio normado es un espacio métrico, podemos decir cuando una sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto x, es decir cuando $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

En algunos espacios métricos existen sucesiones que tienen la propiedad que sus elementos están cada vez más próximos entre sí a medida que n crece, es decir $\lim_{n \to \infty} d(x_{n+m}, x_n) = 0$.

A tales sucesiones se las denomina sucesiones de Cauchy o fundamentales. Lo paradójico es que puede ocurrir que una sucesión de Cauchy no sea convergente, un ejemplo arquetípico de esta situación es el caso de los números racionales con la distancia usual, donde la sucesión dada por $\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots\}$, donde cualquiera se da cuenta que estos números se están acercando en $\sqrt{2}$, sin embargo $\sqrt{2}$ no existe en el espacio de los números racionales, por lo tanto a pesar que sus términos están cada vez más próximos entre sí, la sucesión no converge en los racionales

De más está decir a partir de la desigualdad $d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+m}, x) + d(x, x_n)$, que si una sucesión converge seguro es de Cauchy. Ver Hildebrand (1973) y Kolmogorov (1972).

8.4 Espacios euclídeos

8.4.1 Un espacio euclideo X es un espacio vectorial sobre el que hay definido un producto interior (escalar)

$< , >: X \times X \rightarrow K\ (R\ o\ C)$ Propiedades

$(x,y) \rightarrow < x,y >$

1) $< x,y > = < y,x >^*$, $< x,x > \geq 0$ y $< x,x > = 0$ sii $x = 0$

2) $< \alpha x,y > = \alpha < x,y >$

3) $< x+ y,z > = < x,z > + < y,z >$

Vemos entonces que:

$< 0,x > = < 0x,x > = 0 < x,x > = 0$

$< x, y+z > = < y+z, x >^* = (< y,x > + < z,x >)^* = < y,x >^* + < z,x >^* = < x,y > + < x,z >$

$< x, \alpha y > = < \alpha y, x >^* = (\alpha < y,x >)^* = \alpha^* < y,x >^* = \alpha^* < x,y >$

Un espacio euclideo es un espacio normado con definir $\| x \| = +\sqrt{[< x,x >]}$

8.4.2 Ejemplos:

1) $C^n = \{ z = (z_1, \ldots, z_n),\ z_k \in C,\ k = 1, \ldots, n \}$, $< z,w > = \sum_{k=1}^{n} z_k\, w_k^*$

2) $l^2 = \{ \{z_n\} \subset C : \sum_{k=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty \}$, $< z,w > = \sum_{k=1}^{\infty} z_n\, w_n^*$

3) $L^2[a,b] = \{ f:[a,b] \rightarrow C,\ Re\{f(t)\}, Im\{f(t)\}$ *acotadas y continuas a trozos*$\}$, $< f, g > = \int_a^b f(t)\, g(t)^*\, dt$

Estas definiciones se pueden generalizar, ya que cada una de ellas es un promedio sobre los distintos valores, a dicho promedio se le puede agregar un peso, y entonces quedan:

1) C^n, $< z,w > = \sum_{k=1}^{n} \rho_k\, z_k\, w_k^*$ con ρ_k real y $\rho_k > 0$

2) l^2, $< z,w > = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n\, z_n\, w_n^*$ con ρ_n real y $\rho_n > 0$

3) $L^2[a,b]$, $< f, g > = \int_a^b \rho(t)\, f(t)\, g(t)^*\, dt$ con $\rho(t)$ real y $\rho(t) > 0$ si $a < t < b$

8.4.3 Observación 1: En realidad $< f(x), f(x) > = 0$ no equivale a $f \equiv 0$, a menos que se identifiquen todas aquellas funciones que difieren a lo sumo en un número finito de puntos (en el caso de la Integral de Riemann) o en general que difieren a lo sumo en un conjunto de medida nula. Ver por ejemplo Halmos (1974) y Rudin (1966).

8.4.4 Propiedades de los espacios euclídeos::

1) $y \neq 0$, $\alpha \in C$, $y \neq 0$

$< x+\alpha\, y, x+\alpha\, y > = < x, x+\alpha\, y > + \alpha < y, x+\alpha\, y > = < x+\alpha\, y,x >^* + \alpha < x+\alpha\, y, y >^* =$

$= < x, x > + \alpha^* < x,y > + \alpha < x,y >^* + |\alpha|^2 < y,y > =$

$= \| x \|^2 + \alpha^* < x,y > + \alpha < x,y >^* + |\alpha|^2 \| y \|^2 \geq 0$

Tomando $\alpha = - < x, y > / \| y \|^2$ queda finalmente: $\| x \|^2 - |< x, y >|^2 / \| y \|^2 \geq 0$, o sea:

$|< x, y >| \leq \| x \| \| y \|$ Desigualdad de Schwartz

2) Continuidad del producto interior: Si $x_n \to x$, $y_n \to y$, cuando $n \to \infty$, es decir cuando se cumple $\| x_n - x \| \to 0$, $\| y_n - y \| \to 0$,

Entonces $| < x_n, y_n > - < x,y > | = | < x_n, y_n > - < x,,y_n > + < x\, y_n > - < x,y > | \leq$

$|< x_n - x , y_n >| + |< x\, y_n - y >| \leq \| x_n - x \| \| y_n \| + \| x \| \| y_n - y \| \to 0$, si $n \to \infty$

3) Ortogonalidad.

Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ queda $|< x,y >| / (\| x \| \| y \|) \leq 1$

En particular si $< x,y >$ es real resulta : $-1 \leq < x,y > / (\| x \| \| y \|) \leq 1$

se define el ángulo ϕ entre x e y como aquél que cumple $cos\ \phi = < x,y > / (\| x \| \| y \|)$

Queda $< x,y > = \| x \| \| y \| cos\ \phi$.O sea que son ortogonales si $cos\ \phi = 0$, o $< x, y > = 0$.

En general se puede decir que para $x \neq 0$, $y \neq 0$ son ortogonales sii $< x, y > = 0$.

Además un conjunto $A \subset X$ es ortogonal sii $0 \notin A$, $< x, y > = 0$ $\forall x \in A$, $\forall y \in A$, con $y \neq x$.

Lema: Si $A \subset X$ es ortogonal entonces A es linealmente independiente.

Si $\{x_1, \ldots , x_n\} \subset X$, y $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, resulta

$< 0,x_k > = < \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n ,x_k > = \alpha_1 < x_1 ,x_k > + \ldots + \alpha_n < x_n ,x_k > = \alpha_k \| x_k \|^2 = 0$

pero $x_k \neq 0$ $\therefore$ $\alpha_k = 0$ $\forall k$

8.4.5 Observación: La recíproca obviamente no es válida, sin embargo si $\{y_1, y_2, \ldots\} \subset X$, es linealmente independiente siempre es posible encontrar otro conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ que sea ortogonal, donde cada x_i es combinación lineal de elementos de $\{y_1, y_2, \ldots\}$.

8.4.6 Método de ortogonalización de Gramm - Schmidt

Si $\{y_1, y_2, \ldots\} \subset X$, es linealmente independiente se puede definir:

$x_1 = y_1$,

$x_2 = y_2 + \alpha_1 x_1$, ortogonal con x_1,

es decir: $< x_2, x_1 > = < y_2, x_1 > + \alpha_1 < x_1, x_1 >$, o sea $\alpha_1 = < y_2, x_1 > / \Pi x_1 \Pi^2$

$x_3 = y_3 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$,

y $< x_2, x_1 > = 0$ da $\beta_1 = < y_3, x_1 > / \| x_1 \|^2$, y $< x_3, x_2 > = 0$ da $\beta_2 = < y_3, x_2 > / \| x_2 \|^2$

etc.

Observamos que los vectores generados por $\{y_1, y_2, \ldots\}$, son los mismos que los generados por los $\{x_1, x_2, \ldots\}$, ya que unos son combinación lineal de los otros.

Si ahora se utiliza el método de Gram – Schmidt para el conjunto de funciones linealmente independientes $y_n(t) = t^n$, en un intervalo $a \leq t \leq b$, finito o infinito, se tiene en los respectivos espacios con los productos escalares dados por

$$< f, g > = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t)\, dt$$

donde $\rho(t)$ son las funciones de pesos mencionadas, se tienen los siguientes ejemplos.

a) $L^2[-1,1] = \{ f: [-1,1] \to R$, *acotada y continua a trozos*$\}$, $\rho(x) = 1$, el método de ortogonalización determina

$x_n(t) = P_n(t) = (2^n\, n\, !)^{-n}\, d^n/dx^n\, [(x^2 - 1)^n] = P_n(t)$, polinomios de Legendre.

b) $L^2[0,\infty) = \{ f: [0,\infty) \to R$, *acotada y continua a trozos en todo intervalo finito*$\}$, $\rho(t) = e^{-t}$, el método de ortogonalización determina

$x_n(t) = L_n(x) = e^t\, d^n/dt^n\, [t^n\, e^{-t}]$, polinomios de Laguerre.

c) $L^2(-\infty,+\infty) = \{ f: (-\infty,+\infty) \to R$, *acotada y continua a trozos en todo intervalo finito*$\}$, $\rho(t) = exp(-t^2)$, el método de ortogonalización determina $x_n(t) = H_n(t) = (-1)^n\, exp(t^2)\, d^n/dt^n\, [exp(-t^2)]$, polinomios de Hermite.

4) Descomposición en un sistema ortogonal

Si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$, es ortogonal y además $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, entonces

$< x, x_k > = < \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, x_k > = \alpha_1 < x_1, x_k > + \ldots + \alpha_n < x_n, x_k > = \alpha_k \| x_k \|^2$

de donde $\alpha_k = < x, x_k > / \|x_k\|^2$

Si definimos $u_k = x_k / \|x_k\|$, entonces resulta que $\|u_k\| = 1$, de manera que ahora

$x = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$, donde $z_k = < x, u_k >$ y a $\{u_1, \ldots, u_n\}$ se lo llama ortonormal

Observación: Si $\{x_1, x_2, \ldots\}$es ortogonal el desarrollo $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots$, $\alpha_k = < x, x_k > / \|x_k\|^2$ y el desarrollo $x = z_1 u_1 + z_2 u_2 + \ldots$, donde $u_k = x_k/\|x_k\|$, con $z_k = < x, u_k >$, es decir $\{u_1, u_2, \ldots\}$ ortonormal, son equivalentes. A partir de aquí se emplearán conjuntos ortonormales para simplificar las expresiones.

5) Coeficientes de Fourier

Si $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset X$, es ortonormal y $x \in X$ vector cualquiera, entonces ¿cuáles son los coeficientes $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, de manera que $\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$ sea la mejor aproximación a x?

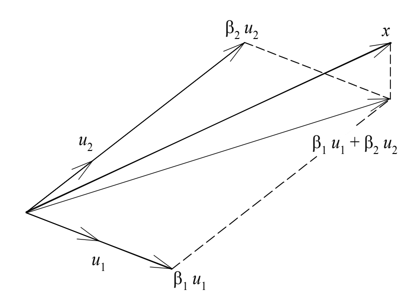


Figura 8.1 *Ejemplo del caso X = R^3, con dos vectores ortonormales, n = 2.*

Es decir ¿quiénes son $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ que hacen $\|x - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_n u_n\|$ mínimo?

Esto es equivalente a decir que $\|x - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_n u_n\|^2$ sea mínimo

$\|x - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_n u_n\|^2 = < x - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_n u_n , x - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_n u_n > =$

$= \| x\|^2 - < x , \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n> - < \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n , x> + < \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n, \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n>$

$= \| x\|^2 - \beta_1 {}^* z_1 - \ldots - \beta_n {}^* z_n - \beta_1 z_1 {}^* - \ldots - \beta_n z_n {}^* + \beta_1 \beta_1 {}^* + \ldots + \beta_n \beta_n {}^* + z_1 z_1 {}^* + \ldots + z_n z_n {}^* - | z_1 |^2 - \ldots - | z_n |^2 =$

$\| x\|^2 - z_1(z_1 - \beta_1)^* + \ldots + z_n(z_n - \beta_n)^* - \beta_1(z_1 - \beta_1)^* - \ldots - \beta_n(z_n - \beta_n)^* - | z_1 |^2 - \ldots - | z_n |^2 =$

$= \| x\|^2 - | z_1 - \beta_1 |^2 + \ldots + | z_n - \beta_n |^2 - | z_1 |^2 - \ldots - | z_n |^2$

Como $\Pi x \Pi$ y $| z_k |$ están fijos, la solución es entonces $\beta_k = z_k$, y a los coeficientes z_k se los llama coeficientes de Fourier.

8.4.7 Observación 1: Vemos que además cuando $\beta_k = z_k$, se tiene la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \| z_k \|^2 \leq \| x \|^2$$

de manera que si el conjunto ortonormal fuera infinito $\{u_1, u_2, \ldots \}$, a cada $x \in X$ se le puede asociar un elemento $\{z_n\} \in l^2$, dado que la serie converge.

8.4.8 Observación 2: La recíproca, es decir dado un conjunto ortonormal infinito $\{u_1, u_2, \ldots \}$ y una sucesión $\{z_n\} \in l^2$, entonces

¿ la serie de vectores $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k u_k$ converge?

En general esto no es verdad, para que sea cierto el espacio euclídeo X debe ser completo, porque si llamamos

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} | z_k |^2 \text{ , entonces}$$

$\| s_{n+m} - s_n\|^2 = \| z_{n+1} u_{n+1} + \ldots + z_{n+m} u_{n+m}\|^2 = | z_{n+1} |^2 + \ldots + | z_{n+m} |^2 = t_{n+m} - t_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

Es decir s_n es una serie de Cauchy o fundamental, por lo tanto converge ya que X es completo.

8.4.9 Observación 3: Lo que todavía no sabemos es si siendo X un espacio euclídeo y completo, y $\{u_1, u_2, \ldots \}$ ortonormal, entonces dado $x \in X$ se cumple la igualdad:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n \quad \text{donde} \quad z_n = < x, u_n >$$

Esto tampoco es válido en general, por eso usamos la expresión

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n$$

para indicar que la de la derecha es la mejor aproximación. Para que valga la igualdad se debe cumplir alguna condición más, y es que el espacio X sea separable, es decir que exista un subconjunto de X que sea numerable y denso. O sea debe existir $A \subset X$, que se encuentre en correspondencia biunívoca (biyectiva o 1 a 1) con el conjunto de los números naturales (numerable), y además $\forall\ x \in A$, existe una sucesión $\{a_n\} \subset A$, tal que $a_n \to x$ cuando $n \to \infty$ (denso).

8.4.10 Espacio de Hilbert: Llamaremos espacio de Hilbert a todo espacio vectorial de dimensión infinita, euclídeo, completo y separable.

Teorema: Si X es un espacio de Hilbert entonces existe un conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots\}$ y para cada $x \in X$ se cumple la igualdad:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n \quad \text{donde} \quad z_n = < x, u_n >$$

Dem: Como X separable, $\exists\, A \subset X$, numerable y denso. Podemos encontrar $\{y_1, y_2, \ldots\} \subset A$, linealmente independiente. Este conjunto es infinito, porque si fuera $\{y_1, \ldots, y_m\}$ como es denso todo elemento de A puede expresarse como combinación lineal de $\{y_1, \ldots, y_m\}$, contradiciendo el hecho que la dimensión de X es infinita. Por lo tanto el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots\}$ es infinito y además no pueden existir en X elementos que sean linealmente independientes a dicho conjunto. Ahora mediante el método de ortogonalización de Gramm-Schmidt, podemos encontrar un conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots\}$ para el que vale lo mismo que para $\{y_1, y_2, \ldots\}$.
Ahora si $x \in X$ cualquiera, tomando $z_k = < x, u_k >$, como X es completo, la observación 2 dice que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n \in X$, entonces $w = x - \sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n \in X$, y a partir de $< w, u_k > = < x, u_k > - z_k = 0$, vemos que si $w \neq 0$, resultaría que $w \in X$ y sería ortogonal (por lo tanto linealmente independiente) con $\{u_1, u_2, \ldots\}$, pero esto es imposible, por lo tanto $w = 0$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n u_n$

Observación: Todos los espacios de Hilbert son isomorfos entre sí y con l^2.
Ver por ejemplo Balanzat (1994), Epstein (1962) y Halmos (1972).

8.5 Conjunto trigonométrico

En $L^2[-\pi, \pi]$ el conjunto trigonométrico $\{1, \cos nt, \operatorname{sen} nt\}_{n=1,2,\ldots}$ con el producto escalar igual a:

$$< f(t), g(t) > = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

Figura 8.1 *Primeras funciones del sistema trigonométrico.*

Para ver que es ortogonal, observamos primero que son todas funciones periódicas de período 2π, además recordando que $e^{i\,nt} = cos\ nt + i\ sen\ nt\ dt$, tenemos

Para $n \neq 0$ es $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,nt}\,dt = e^{i\,nt}/(in)\Big/_{-\pi}^{\pi} = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} cos\ nt\ dt + i\int_{-\pi}^{\pi} sen\ nt\ dt = 0 + i\,0$

si $n \neq 0$ $\quad < 1, cos\ nt > = \int_{-\pi}^{\pi} cos\ nt\ dt = 0,$

$< 1, sen\ nt > = \int_{-\pi}^{\pi} sen\ nt\ dt = 0,$

si $n = 0$ $\quad < 1,1 > = \| 1 \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$

además de:

$$cos\ mt\ cos\ nt = ½\,[cos(m - n)t - cos(m+n)t\,]$$

$$sen\ mt\ sen\ nt = ½\,[cos(m - n)t + cos(m+n)t\,]$$

resulta:

si $m \neq n$ $\quad < cos\ mt, cos\ nt > = 0,$ si $m = n$ $\quad < cos\ nt, cos\ nt > = \| cos\ nt \|^2 = \pi$

si $m \neq n$ $\quad < sen\ mt, sen\ nt > = 0,$ si $m = n$ $\quad < sen\ nt, sen\ nt > = \| sen\ nt \|^2 = \pi$

y de:

$$sen\ mt\ cos\ nt = ½\,[sen(m+n)t + sen(m - n)t\,]$$

resulta:

$$< sen\ mt, cos\ nt > = 0, \quad \forall m\ \forall n$$

Si ahora $f(t)$ es una función real acotada y continua atrozos en $-\pi \le t \le \pi$ podemos escribir

$$f(t) \sim \alpha_o\,1 + \alpha_1\cos t + \beta_1\,sen\ t + \alpha_2\cos 2t + \beta_2\,sen\ 2t + ...$$

donde

$$\alpha_o = < f(t),1 > / \| 1 \|^2 = ½\,\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$\alpha_n = < f(t),cos\ nt > / \| cos\ nt \|^2 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\beta_n = < f(t),sen\ nt > / \| sen\ nt \|^2 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,sen\ nt\ dt, \text{ para } n = 1, 2, 3 \ldots$$

llamando $a_o = \alpha_o/2$, y $a_n = \alpha_n$, $b_n = \beta_n$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$, queda finalmente

$$a_n = < f(t),cos\ nt > / \| cos\ nt \|^2 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = < f(t),sen\ nt > / \| sen\ nt \|^2 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,sen\ nt\ dt, \text{ para } n = 1, 2, 3 \ldots$$

y se escribe:

$$f(t) \sim S_n(t) = ½\,a_o + \sum_{k=1}^{n} (a_k\cos kt + b_k\,sen\ kt)$$

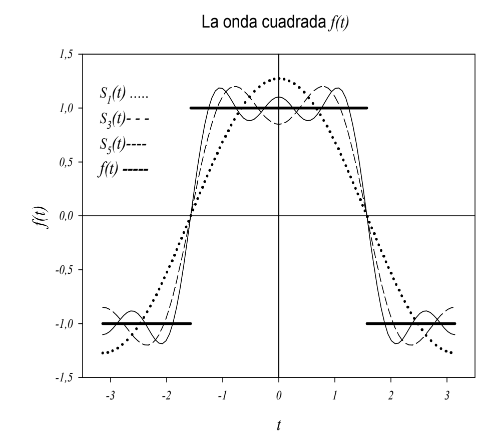


Figura 8.2 *Primeras aproximaciones de la función onda cuadrada empleando el sistema trigonométrico.*

Respecto a la convergencia podemos decir que:

1) $\| f(t) - S_n(t) \|^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir en norma $L^2[-\pi, \pi]$

2) $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \, sen \, nt)$, converge puntualmente, donde $f(t^+)$ y $f(t^-)$ son los límites laterales de f, es decir que el primer término de la igualdad coincide con $f(t)$ en aquellos puntos en que f es continua. Para abreviar muchas veces escribiremos $f(t)$ en lugar de $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$.

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \, sen \, nt),$$

8.5.1 Observación: Cuando se describió el método de Gramm – Schmidt se mencionaron otros conjuntos ortogonales infinitos, a saber: los polinomios de Legendre para $-1 \leq t \leq 1$, los polinomios de Laguerre para $0 \leq t < \infty$, y los polinomios de Hermite para $-\infty < t < +\infty$.

8.5.2 Generalización a todo intervalo finito: Los resultados anteriores pueden trasladarse a funciones $g(x)$ en $L^2[-a, a]$, que a su vez pueden pensarse como funciones periódicas de período $2a$, mediante la transformación de $-\pi \leq t \leq \pi$ a $-a \leq x \leq a$ mediante el par de relaciones $t = (\pi/a)\, x$, y $x = (a/\pi)\, t$

$$g(x) = g((a/\pi)\, t) = f(t) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \, sen \, nt),$$

con los cambios de variables queda

$$g(x) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi/a\, x + b_n \, sen \, n\pi/a\, t) \quad \text{donde}$$

$$a_n = 1/a \int_{-a}^{a} f(x) \cos n\pi/a\, x \; dx, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ y}$$

$$b_n = 1/a \int_{-a}^{a} f(x) \, sen \, n\pi/a\, x \; dx, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

8.5.3 Forma compleja: También se puede escribir en forma compleja a partir de las expresiones:

$$\cos n\pi/a\, x = ½\,[e^{-i\, n\pi/a\, x} + e^{i\, n\pi/a\, x}], \qquad \operatorname{sen} n\pi/a\, x = i/2[e^{-i\, n\pi/a\, x} - e^{i\, n\pi/a\, x}]$$

$$f(x) = ½\, a_o + \sum_{n=1}^{\infty} [\, ½\,(a_n - i\, b_n)\, e^{i\, n\pi/a\, x} + ½\,(a_n + i\, b_n)\, e^{-i\, n\pi/a\, x}\,]$$ llamando

$c_n = ½\,(a_n - i\, b_n) = (\,½_a)\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,[\cos n\pi/a\, x - i \operatorname{sen} n\pi/a\, x\,]\, dx$, inclusive $c_o = ½\, a_o$, además $c_{-n} = c_n{}^*$.

$$c_n = (\,½_a) \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-i\, n\pi/a\, x}\, dx\;, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\, n\pi/a\, x}$$

Más detalles se pueden ver en Churchill (1941), Courant (1953) y Franklin (1933).

8.6 Transformada de Fourier

Ahora queremos pasar del intervalo $-a \le x \le a$, a todo R, para esto podemos pensar en $a \to \infty$. Podemos definir una variable discreta $s_n = n\, \pi / a$, entonces $\Delta s_n = s_n - s_{n-1} = \pi/a$, $F(s_n) = (a/\pi)\, c_n$

Entonces las expresiones:

$$c_n = (\,½_a) \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-i\,(n\pi/a)\, x}\, dx \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\,(n\pi/a)\, x} \quad ,$$

pasan a ser:

$$F(s_n) = 1/(2\pi) \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-i\, s_n x}\, dx \qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s_n)\, e^{i\, s_n x}\, \Delta s_n \quad ,$$

cuando $a \to \infty$, la segunda es una suma de Riemann, $s_n \to s$ (contínua) , $\Delta s_n \to ds$, $\Sigma \to \int$

$$F(s) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\, s\, x}\, dx \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{i\, s\, x}\, ds \quad ,$$

En $L^1(R) = \{\, f\!: R \to C, \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty \,\}$ y $L^2(R) = \{\, f\!: R \to C, \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \,\}$, se define la transformada de Fourier

$$F(s) = \mathcal{F}\{f(x)\} = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\, s\, x}\, dx,$$

y su inversa queda

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{i\, s\, x}\, ds$$

Más detalles y ejemplos en Hsu (1987), Sneddon (1995), Spiegel (1992) y Sproviero (2005).

8.6.1 Observación 1: Todas las integrales impropias se toman en el sentido de valor principal definido en variable compleja. Es decir que L^1 y L^2 deben requerir que tales funciones tengan

su parte real y compleja acotadas y continuas a trozos en todo intervalo finito (existen los límites laterales y son finitos), y que $|f(x)|$ tienda a cero cuando $|x|$ crece indefinidamente.

8.6.2 Observación 2: El factor $1/2\pi$ puede aparecer en la transformada o en su inversa, o inclusive ambos pueden tener un factor $(1/2\pi)^{½}$.

8.6.3 Propiedades: Si $F(s) = \mathcal{F}[f(x)]$

1) $\mathcal{F}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1\ \mathcal{F}[f_1(x)] + c_2\ \mathcal{F}[f_2(x)]$

2) $\mathcal{F}[\ e^{i\, so\, x}\ f(x)\ ] = F(s - so)$

3) $\mathcal{F}[\ f(x - xo)] = e^{-i\, s\, xo}\ F(s)$

4) $\mathcal{F}[\ f'(x)] = i\ s\ F(s)$, y por lo tanto $\mathcal{F}[\ f^{(n)}(x)] = (i\ s)^n\ F(s)$

8.6.4 Ejemplos: Calcular las transformadas de Fourier de las funciones:

1) $f(x) = e^{-a|x|}$, $F(s) = 2\ Re\{ \int_0^{\infty} e^{-(a+is)x}\ dx\} = (a/\pi) / (\ a^2 + s^2)$

2) $f(x) = 1 / (\ x^2 + a^2\ )$, se obtiene $F(s) = 1/(2a)\ e^{-a|s|}$ calcularlo con la antitransformada de 1).

3) $f(x) = 1$ si $|x| \leq a$, $f(x) = 0$ si $|x| > a$, entonces $F(s) = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\, s\, x}\ dx = (a/\pi)\ [sen(as) / (as)]$

4) $f(x) = exp(-a\ x^2\ )$, resulta $F(s) = [1/\sqrt{(4\pi\ a)}]\ \ exp[-\ s^2 / (4a)\ ]$, recordar $\int_{-\alpha}^{\alpha} exp(-a\ x^2)\ dx = \sqrt{(\pi/a)}$

De la misma forma que la antitransformada de $exp[-\ s^2 / (4a)\ ]$ es $1/\sqrt{(4\pi\ a)}\ exp(-a\ x^2\ )$.

5) Convolución: Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones de L^1 y L^2 se define la convolución $(f_1 * f_2)(x) = f_1(x) * f_2(x)$ como

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - t)\, f_2(t)\ dt$$

Entonces si ahora $F_1(s) = \mathcal{F}\{f_1(x)\}$ y $F_2(s) = \mathcal{F}\{f_2(x)\}$, y hacemos los mismas cuentas que con la transformada de Laplace resulta $\mathcal{F}\{(f_1 * f_2)(x)\} = 2\pi\, F_1(s)\ F_2(s)$.

Referencias

Balanzat, M. (1994). *Matemática avanzada para la física*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Churchill, R.V. (1941). *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company.

Courant, R. y Hilbert D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Volume I. New York. E.U.A. Interscience Publishers Inc.

Epstein, B. (1962). *Partial Differetinal Equations*. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company.

Franklin P. (1933). *Differential Equations for Engineers*. New York. E.U.A. Dover Publications Inc.

Halmos, P.R. (1972). *Introduction to Hilbert Space and the theory of spectral multiplicity*. New York. E.U.A. Chelsea Publishing Company.

Halmos, P.R. (1974). *Measure theory*. New York. E.U.A. Springer-Verlag.

Hildebrand, F.B. (1973). *Métodos de la matemática aplicada*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Hsu, H.P. (1987). *Análisis de Fourier*. Wilmington. E.U.A. Addison Wesley Iberoamericana.

Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V. (1972).*Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Lighthill, M.J. (1959). *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*. Cambridge. Reino Unido. Cambridge University Press.

Rudin, W. (1966). *Principios de análisis matemático*. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company.

Sneddon, I.N. (1995). *Fourier transforms*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Spiegel, M.R. (1992). *Transformadas de Laplace*. Mexico D.F. Mexico. McGraw-Hill/Inter american de Mexico, S.A.

Sproviero, M.O. (2005). *Transformadas de Laplace y de Fourier*. CABA. Argentina. Nueva Librería.

CAPÍTULO 9
Problemas de valores de frontera

Matias Rafti

Rebelde soy para el lazo
ni sus cadena me echó el amor,
yo soy gorrión viajero
y el mundo entero fue mi ambición.
Igual que baldosa floja
salpico si alguien me pone el pie

J.Bocazzi,F.Sanssone, D.Gilardoni; BALDOSA FLOJA.

9.1 Notas sobre operadores lineales

Si X y Y son dos espacios vectoriales, sobre el mismo cuerpo de escalares K, se llama operador lineal $\mathcal{L}$ de X en Y a toda función que a cada x de X le asigna un elemento $y = \mathcal{L}[x]$ de Y que cumple:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2] = \alpha_1 \mathcal{L}[x_1] + \alpha_2 \mathcal{L}[x_2], \qquad \forall x_k \in X \text{ y } \forall \alpha_k \in K,\ k=1,2.$$

Nota: Si bien $\mathcal{L}[0] = 0$, pero $\mathcal{L}[x] = 0$ no necesariamente implica que $x = 0$.

Al conjunto $N(\mathcal{L}) = \{x \in X / \mathcal{L}[x] = 0\}$ se lo llama **núcleo del operador**.

9.1.1 Ejemplos:

1) El operador nulo, $\boldsymbol{O}: X \to Y$, $\boldsymbol{O}[x] = 0\ \forall x \in X$. $N(\boldsymbol{O}) = X$.

2) El operador identidad, para $Y = X$, $\boldsymbol{I}: X \to X$, $\boldsymbol{I}[x] = x\ \forall x \in X$. También se escribe $\boldsymbol{I}_X$. Resulta $N(\boldsymbol{I}) = \{0\}$.

3) Composición. Si $\mathcal{L}_1: X_1 \to X_2$, y $\mathcal{L}_2: X_2 \to X_3$, se define el operador composición $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1$ tal que, $\mathcal{L}: X_1 \to X_3$, $\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}_2[\mathcal{L}_1[x]]$

4) Inversa. Dada $\mathcal{L}: X \to Y$, si existe $\mathcal{L}^{-1}: Y \to X$, tal que $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L} = \boldsymbol{I}_X$ y $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \boldsymbol{I}_Y$, no siempre existe. Al operador $\mathcal{L}^{-1}$ se lo llama inverso de $\mathcal{L}$.

5) $X = R^n$, $Y = R^m$, $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ base de R^n, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ base de R^m

Si $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i$, $\quad \mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{v}_j$, $\quad$ ¿cuál es la relación $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$?

$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \mathcal{L}[\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{L}[\mathbf{u}_i]$, pero $\mathcal{L}[\mathbf{u}_i] \in R^m$ por lo tanto $\mathcal{L}[\mathbf{u}_i] = \sum_{j=1}^{m} L_{ji} \boldsymbol{v}_j$,

$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{j=1}^{m} L_{ji} \boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} L_{ji} x_i) \boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{v}_j$, queda pues $y_j = \sum_{i=1}^{n} L_{ji} x_i$

Dadas las bases de X e Y a cada operador lineal $\mathcal{L}$ se le puede asociar una matriz (L_{ij})

En lugar de trabajar con $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\mathcal{L}$ se lo hace con $(x_1, x_2, \ldots)$, $(y_1, y_2, \ldots)$, (L_{ij})

Si se tratara de un espacio euclideo y $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ ortognormal, resulta $L_{ij} = < L[\mathbf{u}_i], \boldsymbol{v}_i >$

6) $X = L^2[a,b]$, $Y = L^2[c,d]$, y una función contínua $L: [c,d]\times[a,b] \to R$ (o C)

$L[f(x)] = F(s) = \int_a^b L(s,x) f(x)\, dx$

a) $a = 0$, $b = \infty$, $L(s,x) = exp(-s\,x)$, es la transformada de Laplace.

b) $a = -\infty$, $b = \infty$, $L(s,x) = exp(-i\,s\,x)$, es la transformada de Fourier.

9.2 El espacio *L(X, Y)*

Si X e Y son espacios normados se puede definir la continuidad de los operadores a partir de:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \; \| x - x_0 \|_X < \delta \;\; \Rightarrow \;\; \| \mathcal{L}[\boldsymbol{x}] - \mathcal{L}[\boldsymbol{x}_0] \|_Y < \varepsilon$$

El espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ de todos los operadores lineales y continuos de X en Y es un espacio lineal.

En el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ se puede definir una norma: $\| \mathcal{L} \| = \sup_{x\neq 0} (\|\mathcal{L}[\boldsymbol{x}]\| / \|\boldsymbol{x}\|) = \sup_{\|u\|=1} \|\mathcal{L}[\boldsymbol{u}]\|$,

por lo tanto $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado.

Además se cumple que $\| \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \| \leq \| \mathcal{L}_1 \| + \| \mathcal{L}_2 \|$, $\| \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \| \leq \| \mathcal{L}_1 \| \| \mathcal{L}_2 \|$

Los espacios normados y completos se denominan espacios de Banach, y si X e Y son espacios de Banach, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ también es un espacio de Banach, entonces se pueden definir series de operadores $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$, y probar que converge si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{L}_n\|$ converge.

Consideramos X un espacio de Banach, y por lo tanto también $\mathcal{L}(X,X)$ es de Banach, sabemos que para cualquier operador $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(X,X)$, si $\| \mathcal{L} \| < 1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{L}\|^n$ converge y por lo tanto, por el criterio de comparación, $\|\mathcal{L}^n\| \leq \|\mathcal{L}\|^n$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \| \mathcal{L}^n \|$ converge, donde hemos tomado $\mathcal{L}^0 = I$. Como el espacio es de Banach, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n$ también converge.

El operador identidad I tiene inverso en $\mathcal{L}(X,X)$, y además tenemos una distancia inducida por la norma, usando la analogía entre operadores y matrices, nos preguntamos ¿cuánto podemos "alejarnos" I y seguir teniendo inverso?

Es decir ¿cuánto debe valer $\varepsilon > 0$ para que si $\| I - \mathcal{A} \| < \varepsilon$ entonces exista $\mathcal{A}^{-1}$?

Llamando $\mathcal{L} = I - \mathcal{A}$, es decir $\mathcal{A} = I - \mathcal{L}$, tenemos:

$I\ (I + \mathcal{L} + \mathcal{L}^2 + \ldots + \mathcal{L}^n) = I + \mathcal{L} + \mathcal{L}^2 + \ldots + \mathcal{L}^n$

$\mathcal{L}\ (I + \mathcal{L} + \mathcal{L}^2 + \ldots + \mathcal{L}^n) = \mathcal{L} + \mathcal{L}^2 + \ldots + \mathcal{L}^n + \mathcal{L}^{n+1}$

de manera que $(I - \mathcal{L})(I + \mathcal{L} + \mathcal{L}^2 + \ldots + \mathcal{L}^n) = I - \mathcal{L}^{n+1}$ es decir

si $\|\mathcal{L}\| < 1$ entonces $0 \leq \| \mathcal{L}^n \| \leq \|\mathcal{L}\|^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y como $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n$ converge, y

además $(I - \mathcal{L}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n = I$ resulta $(I - \mathcal{L})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n$.

En otras palabras si $\| I - \mathcal{A} \| < 1$ existe $\mathcal{A}^{-1}$ y vale $\mathcal{A}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - \mathcal{A})^n$

Si ahora no se cumple $\| I - \mathcal{A} \| = \|\mathcal{L}\| < 1$, pero al menos $\mathcal{L}$ está acotado, es decir existe algún número $\lambda \neq 0$, tal que $\| \mathcal{L} \| < |\lambda|$, o sea $\| \mathcal{L} / \lambda \| = \| \mathcal{L} \| / |\lambda| < 1$ entonces al menos $(I - \mathcal{L}/\lambda)$ tiene inverso, o lo que es lo mismo $(\lambda I - \mathcal{L})$ tiene inverso en $\mathcal{L}(X, X)$.

Si $\mathcal{L}$ es un operador lineal de un espacio normado X en sí mismo, e I es el operador identidad de X, entonces se debe cumplir alguna de las siguientes situaciones:

1) $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \lambda \boldsymbol{x}$ tiene solución no nula $\therefore$ no existe $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}$, λ se llama valor propio o autovalor de $\mathcal{L}$, y x vector propio o autovector de $\mathcal{L}$.

2) Existe $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}$ y pertenece a $\mathcal{L}(X, X)$ es acotado, λ se llama valor regular de $\mathcal{L}$.

3) Existe $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}$ pero no pertenece a $\mathcal{L}(X, X)$ no es acotado, para que ocurra esto debe ser $dim(X) = \infty$.

Si $\mathcal{L}$ es un operador lineal en las condiciones anteriores entonces al conjunto de valores de λ que no son regulares se los lama espectro del operador $\mathcal{L}$, y lo escribimos $\sigma(\mathcal{L})$.

Vemos que si $|\lambda| \leq \| \mathcal{L} \|$ entonces $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$, es decir que si $|\lambda| > \|\mathcal{L}\|$ entonces λ es regular.

Si $\mathcal{L}$ es un operador lineal de un espacio Euclideo X en sí mismo, se llama operador adjunto $\mathcal{L}^+$ de $\mathcal{L}$ al operador que verifica:

$$< \mathcal{L}^+[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{y} > = < \boldsymbol{x}, \mathcal{L}[\boldsymbol{y}] > \quad \forall \boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{y} \in X.$$

9.2.1 Observación: En términos de bases ortonormales se tiene que $L_{ij}^+ = L_{ji}^*$.

Si $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}$ se dice que el operador $\mathcal{L}$ es hermítico.

9.2.2 Ejemplo: Consideramos el espacio de funciones derivables en el intervalo $a \leq x \leq b$, que cumplen $y(b) = y(a)$ con el producto escalar: $< y_1(x), y_2(x) > = \int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, dx$

¿Cuál es el operador adjunto $\mathcal{L}^+$ del operador $\mathcal{L} = d/dx$?

$$<y_1(x), \mathcal{L}[y_2(x)]> = \int_a^b y_1(x)\, dy_2/dx\, dx = y_1(b)\, y_2(b) - y_1(a)\, y_2(a) - \int_a^b dy_1/dx\, y_2(x)\, dx =$$

$$\int_a^b (-dy_1/dx)\, y_2(x)\, dx = <-dy_1/dx, y_2(x)> = <\mathcal{L}^+[y_1(x)], y_2(x)>$$

Es decir que $\mathcal{L}^+ = -d/dx$, por lo tanto $\mathcal{L}^+ \neq \mathcal{L}$ no es hermítico.

9.2.3 Teorema: Los valores propios de un operador hermítico son reales.

Sea $\boldsymbol{x}$ autovalor de $\mathcal{L}$ es decir $\boldsymbol{x} \neq 0$ y $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \lambda x$, entonces:

$$\lambda^* <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}> = <\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x}> = <\boldsymbol{x}, \mathcal{L}[\boldsymbol{x}]> = <\mathcal{L}^+[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}> = <\mathcal{L}[\boldsymbol{x}], \boldsymbol{x}> = \lambda <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>$$

$(\lambda^* - \lambda) <\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}> = (\lambda^* - \lambda) \|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$ pero $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ resulta $\lambda^* = \lambda$

9.2.4 Teorema: Los vectores propios de valores propios distintos de un operador hermítico son ortogonales pues si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ cumplen $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}_1] = \lambda_1 x_1$ y $\mathcal{L}[\boldsymbol{x}_2] = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$, y además $\lambda_2 \neq \lambda_1$ entonces:

$$\lambda_1 <\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2> = <\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2> = <\mathcal{L}[\boldsymbol{x}_1], x_2> = <\mathcal{L}^+[\boldsymbol{x}_1], x_2> = <x_1, \mathcal{L}[\boldsymbol{x}_2]> = <x_1, \lambda_2 x_2> = \lambda_2 <x_1, x_2>$$

$(\lambda_2 - \lambda_1) <\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2> = 0$ pero $\lambda_2 \neq \lambda_1$ resulta $<\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2> = 0$

Para ver más detalles consultar Halmos (1972), Kolmogorov (1972),

9.3 Problemas de valores de frontera o de borde

Resolver un problema de valores iniciales asociado a una EDO, consiste en encontrar soluciones de dicha EDO en cierto intervalo $a \leq x \leq b$, cuando se tiene información en algún punto x_o, tal que $a \leq x_o \leq b$. Cuando la información (condiciones) está dada en ambos extremos del intervalo, se dice que se tiene un problema de valores de frontera.

Por ejemplo si se buscan soluciones de $y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0$, para $a \leq x \leq b$, si se conocen $y(x_o) = y_{10}$, $y'(x_o) = y_{20}$, se tiene un problema de valores iniciales. Pero si se buscan soluciones para $a \leq x \leq b$, cuando la información es $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, entonces se tiene un problema de valores de frontera.

Para los problemas de valores iniciales existe un teorema que da condiciones para poder asegurar que exista una única solución del problema. ¿Hay un teorema equivalente para los problemas de valores de frontera?

9.3.1 Ejemplo: Consideremos el intervalo $0 \leq x \leq b$ para la conocida EDO:

$$y'' + y = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = y_b$$

Sabemos que la solución general es: $y(x) = c_1\, sen\, x + c_2 \cos x$

La primer condición da $y(0) = c_2 = 0$, o sea: $y(x) = c_1\, sen\, x$

Y la segunda condición: $y(b) = c_1\, sen\, b = y_b$, permitiría, en principio determinar c_1. Como en los problemas de valores iniciales.

En este caso se pueden presentar tres situaciones:

1) $b \neq n\,\pi$, entonces $c_1 \, sen\, b = y_b$, el problema tiene una única solución: $y(x) = y_b \, sen\, x \,/\, sen\, b$,

2) $b = n\,\pi$, $y_b \neq 0$, entonces $c_1 \, sen\, n\pi = 0 \neq y_b$, no existe c_1, el problema no tiene solución,

3) $b = n\,\pi$, $y_b = 0$, entonces $c_1 \, sen\, n\pi = 0 = y_b$, c_1 puede ser cualquier número el problema tiene infinitas soluciones.

Vemos entonces, que por simple que sea la EDO no se puede asegurar que un problema de frontera tenga solución, ni siquiera que de tener solución esta sea única.

Una forma de buscar solución a un problema de frontera es ver si se puede perturbar la EDO para que existan soluciones.

9.4 El problema de Sturm – Liouville

La ecuación diferencial $y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0$, también puede escribirse de otra forma.

La idea es multiplicar la misma por una función no nula $p(x)$, que sea derivable, y tal que los dos primeros términos se conviertan en la derivada de un producto.

Es decir:

$$p(x)\, d^2y/dx^2 + p(x)\, p_1(x)\, dy/dx + p(x)\, p_2(x)\, y = d/dx\, [\, p(x)\, dy/dx\,] + p(x)\, p_2(x)\, y$$

Para que esto suceda debe cumplirse que: $dp/dx = p(x)\, p_1(x)$

O sea $dp/p = p_1(x)\, dx$

$$p(x) = exp[\int_a^x p_1(t)\, dt\,]$$

Entonces la ecuación diferencial se puede escribir como

$$d/dx[\, p(x)\, dy/dx\,] + q(x)\, y = 0,$$

donde hemos llamado $q(x) = p(x)\, p_2(x)$.

Algunas ecuaciones diferenciales conocidas se pueden escribir de esta forma, por ejemplo:

1) $d^2y/\, dx^2 + \beta^2\, y = 0$, como $p_1(x) = 0$, por lo tanto $p(x) = 1$, queda como $d/dx[dy/dx\,] + \beta^2\, y = 0$,

2) $(1 - x^2)\, d^2y/\, dx^2 - 2\, x\, dy/dx + \beta\, y = 0$, obviamente es $p(x) = 1 - x^2$, y la ecuación diferencial se puede re escribir como $d/dx[(1 - x^2)\, dy/dx] + \beta\, y = 0$.

3) $x\, d^2y/\, dx^2 + (1 - x)\, dy/dx + \beta\, y = 0$, o como $d^2y/\, dx^2 + (1/x - 1)\, dy/dx + (\beta\, /x)\, y = 0$, es $p_1(x) = 1/x - 1$, resulta $p(x) = x\, e^{-x}$, quedando finalmente $d/dx[x\, e^{-x}\, dy/dx] + \beta\, e^{-x}\, y = 0.$

4) $d^2y/\, dx^2 - 2\, x\, dy/dx + 2\,\beta\, y = 0$, es $p_1(x) = -2x$, resulta $p(x) = exp(-x^2)$, la ecuación diferencial queda finalmente $d/dx[exp(-x^2)\, dy/dx] + \beta\, exp(-x^2)\, y = 0.$

5) $x^2\, d^2y/\, dx^2 + x\, dy/dx + (k^2x^2 - n^2\,)\, y = 0$, escrita como $d^2y/\, dx^2 + (1/x)\, dy/dx + (k^2 - n^2/x^2\,)\, y = 0$, es entonces $p_1(x) = 1/x$, resulta $p(x) = x$, quedando finalmente $d/dx[\, x\, dy/dx] + (k^2\, x - n^2/x)\, y = 0.$

Se llama problema de Sturm – Liouville a encontrar valores de λ, tales que existan soluciones no triviales ($y \neq 0$) del problema de valores de frontera de la ecuación diferencial

$$d/dx[\, p(x)\, dy/dx\,] + [\, q(x) + \lambda\, \rho(x)\,]\, y = 0,$$

donde $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, están definidas y son continuas en $a \leq x \leq b$, $p(x)$ es derivable en $a < x < b$, y además $p(x)$ y $\rho(x) > 0$ en $a < x < b$, para las condiciones de borde:

1) Regulares

$$\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \alpha_2\, y'(a) = 0, & \alpha_1, \alpha_2 \text{ no ambas nulas, o sea } |\alpha_1| + |\alpha_1| \neq 0 \\ \beta_1\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0 & |\beta_1| + |\beta_1| \neq 0 \end{cases}$$

2) Periódicas:

$$\begin{cases} p(b) = p(a) \\ y(b) = y(a) \\ y'(b) = y'(a) \end{cases}$$

3) Singulares

Tipo 1: $\begin{cases} p(a) = 0, \\ \beta_1\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0, \end{cases} \qquad |\beta_1| + |\beta_1| \neq 0$

Tipo 2: $\begin{cases} \alpha_1\, y(a) + \alpha_2\, y'(a) = 0, \\ p(b) = 0, \end{cases} \qquad |\alpha_1| + |\alpha_1| \neq 0$

Tipo 3: $\begin{cases} p(a) = 0, \\ p(b) = 0 \end{cases}$

9.4.1 Observación: La EDO anterior se puede transformar en el problema de determinar autovalores y autovectores (autofunciones) del operador $\mathcal{L} = -\, 1/\rho(x)\, d/dx\, [\, p(x)\, d/dx\,] - q(x)/\rho(x)$, es decir queda como:

$$\mathcal{L}\,[y(x)] = \lambda\, y(x)$$

Al operador $\mathcal{L}$ se lo llama operador de Sturm – Liouville, y entonces el problema de Sturm – Liouville consiste en encontrar los autovalores y las autofunciones de dicho operador cuando se da alguna de las condiciones de borde antes mencionadas.
Ver Balanzat (1994), Courant (1953), Hildebrand (1973), Ince (1956) y Stephenson (1982).

9.4.2 Observación: Recordar las funciones hiperbólicas: $ch\, x = ½\, (e^x + e^{-x})$, $sh\, x = ½\, (e^x - e^{-x})$, que cumplen las condiciones $ch'x = sh\, x$, $sh'x = ch\, x$, $ch\, 0 = 1$, $sh\, 0 = 0$, si $x > 0$ entonces $e^x > e^{-x}$, o sea $ch\, x$ crece y además $ch\, (-x) = ch\, x$, por otra parte si $x > 0$ entonces $sh\, x > 0$, y $sh\, (-x) = -\, sh\, x$.

9.4.3 Ejemplo de condiciones regulares:

1) $d^2y/\, dx^2 = -\, \lambda\, y(x)$, $\quad 0 \le x \le L$, es decir $a = 0$, $b = L$, con $y(0) = 0$, $y(L) = 0$

a) $\lambda = 0$, $\quad y(x) = c_0 + c_1\, x$, $y(0) = c_0 = 0\ \therefore\ y(x) = c_1\, x$, y $c_1 \neq 0$, $y(L) = c_1\, L = 0\ \therefore\ c_1 = 0$ absurdo

$\lambda = 0$ no es valor propio.

b) $\lambda = -\, k^2 < 0$, tomemos $k > 0$

$y(x) = c_1\, e^{kx} + c_2\, e^{-kx}$, $\quad y(0) = c_1 + c_2 = 0\ \therefore\ y(x) = c_1\, (\, e^{kx} - e^{-kx}\,) = 2\, c_1\, sh\, kx$, y $c_1 \neq 0$

$y(L) = 2\, c_1\, sh\, kL \neq 0$ porque $k\, L \neq 0$ por lo tanto $\lambda < 0$ no es autovalor.

c) $\lambda = k^2 > 0$, $\quad y(x) = c_1\, sen\, kx + c_2\, cos\, kx$, $\quad y(0) = c_2 = 0\ \therefore\ y(x) = c_1\, sen\, kx$, $c_1 \neq 0$

$y(L) = c_1\, sen\, kL = 0\ \therefore\ k\, L = n\, \pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $k_n = n\, \pi\, /\, L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lambda = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ autovalores, $y_n(x) = c_n\, sen\, [(n\pi/L)\, x]$ autofunciones.

2) $d^2y/dx^2 = -\lambda\, y(x)$, $0 \le x \le L$, es decir $a = 0$, $b = L$, con $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$

a) $\lambda = 0$, $y(x) = c_0 + c_1 x$, $y'(x) = c_1$, $y'(0) = c_1 = 0 \therefore y(x) = c_0$, $y'(L) = 0$

$\lambda = 0$ es autovalor, $y_0(x) = c_0 \ne 0$ autofunciones.

b) $\lambda = -k^2 > 0$, $y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, $y'(x) = k\,(c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx})$, $y'(0) = k\,(c_1 - c_2) = 0 \therefore c_2 = c_1$

$y(x) = 2\, c_1\, ch\, kx$, $c_1 \ne 0$, $y'(L) = 2kc_1\, sh\, kL \ne 0$ pues $k\,L \ne 0$ o sea $\lambda > 0$ no es autovalor.

c) $\lambda = k^2 > 0$, $y(x) = c_1\, sen\, kx + c_2 \cos kx$, $y'(x) = k\,(c_1 \cos kx - c_2\, sen\, kx)$, $y(0) = c_1 = 0 \therefore$

$y(x) = c_2 \cos kx$, $c_2 \ne 0$ $y'(L) = -k\, c_2\, sen\, kL = 0 \therefore k_n = n\,\pi\,/\,L$, $n = 1, 2, 3, .$

. . $\lambda = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ autovalores, $y_n(x) = c_n \cos\, [(n\pi/L)\, x]$ autofunciones.

9.4.4 Ejemplo de condiciones periódicas:

$d^2y/dx^2 = -\lambda\, y(x)$ $-L \le x \le L$, $L \ne 0$, es decir $a = -L$, $b = L$, con $p(x) = 1$

a) $\lambda = 0$, $y(x) = c_0 + c_1 x$, $y(L) - y(-L) = 2\, c_1\, L \therefore c_1 = 0$, $y(x) = c_0 \ne 0$, $y'(x) = 0$.

$\lambda = 0$ es autovalor, $y_0(x) = c_0$ autofunciones.

b) $\lambda = -k^2 < 0$, $y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, $y(L) - y(-L) = c_1\,(e^{kL} - e^{-kL}) - c_2\,(e^{kL} - e^{-kL},) = 0 \therefore c_2 = c_1 \therefore$

$y(x) = 2c_1\, ch\, kx$, $c_1 \ne 0$, $y'(x) = 2kc_1\, sh\, kx$, y $y'(L) - y'(-L) = 4\, k\, c_1\, sh\, kL \ne 0$

$\lambda > 0$ no es autovalor.

c) $\lambda = k^2 > 0$, $y(x) = c_1\, sen\, kx + c_2 \cos kx$, $y(L) - y(-L) = 2c_1\, sen\, kL = 0 \therefore c_1 = 0$ o $kL = n\pi$, $n = 1,2, . .$

$y'(x) = k\,(c_1 \cos kx - c_2\, sen\, kx)$,

$y'(-L) - y'(L) = 2\, c_2\, sen\, kL = 0 \therefore c_2 = 0$ o $kL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\lambda = (n\pi\,/\,L)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ autovalores,

$y_n(x) = c_n\, sen\, [(n\pi/L)\, x] + d_n\, sen\, [(n\pi/L)\, x]$ autofunciones.

9.4.5 Ejemplo de condiciones singulares:

Tipo 1)

$d/dx[\, x\, dy/dx] - m^2/x = -\lambda\, x\, y(x)$, $0 \le x \le L$, $a = 0$, $b = L$, $\rho(x) = p(x) = x$, $q(x) = -m^2/x$,

Condiciones de borde, $a = 0$, $b = L$

$$\begin{cases} p(0) = 0, \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

a) $\lambda = 0$, $y(x) = c_1 x^m + c_2 x^{-m}$, como $x^{-m} \to \infty$ si $x \to 0$, $c_2 = 0 \therefore y(x) = c_1 x^m$, y $c_1 \ne 0$,

pero $y(L) = c_1 L^m \ne 0 \therefore$ $\lambda = 0$ no es valor propio.

b) $\lambda = -k^2 < 0$, tomemos $k > 0$

$y(x) = c_1 I_m(kx) + c_2 K_m(kx)$, como $K_m(kx) \to \infty$ si $x \to 0$, $c_2 = 0 \therefore y(x) = c_1 I_m(kx)$, y $c_1 \ne 0$,

$y(L) = c_1 I_m(kL) \ne 0$ por lo tanto $\lambda < 0$ no es autovalor.

c) $\lambda = k^2 > 0$,

$y(x) = c_1 J_m(kx) + c_2 Y_m(kx)$, como $Y_m(kx) \to -\infty$ si $x \to 0$, $c_2 = 0 \therefore y(x) = c_1 J_m(kx)$, y $c_1 \ne 0$,

$y(L) = c_1 J_m(kL) = 0 \therefore k\, L = a_{nm}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $k = a_{nm}/L$, con a_{mn} ceros de $J_m(t)$

$\lambda = (a_{nm}/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ autovalores, $y_n(x) = c_n J_m\, [(a_{nm}/L)\, x]$ autofunciones.

Tipo 3)

$d/dx\,[(1-x^2)\,dy/dx] = -\lambda\, x\, y(x)$, $-1 \le x \le 1$, es decir $a = -1$, $b = 1$, $p(x) = 1 - x^2$.

Por lo tanto $p(a) = p(-1) = 0$, y $p(b) = p(1) = 0$. Tipo 3

a) $\lambda = 0$, $y(x) = c_0 + c_1 \ln[(1+x)/(1-x)]$, como $\ln[(1+x)/(1-x)] \to \infty$ si $x \to \pm 1$, $c_2 = 0$ $\therefore$

$\lambda = 0$ autovalor, $y_0(x) = c_0$ autofunciones, con $c_0 \neq 0$.

b) $\lambda \neq 0$, $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, $y_1(x) = \sum c_{2n}\, x^{2n}$, $y_2(x) = \sum c_{2n+1}\, x^{2n+1}$, para $n = 0, 1, \ldots$

$c_{2n} = (-1)^n\, \lambda\, (\lambda - 2\, 3) \ldots [\lambda - (2n-2)(2n-1)]/(2n)!$

$c_{2n+1} = (-1)^n\, (\lambda - 1\, 2)(\lambda - 3\, 4) \ldots [\lambda - (2n-1)\, 2n\,]/(2n+1)!$

Estas series divergen en $x = \pm 1$ a menos que $\lambda = l\,(l+1)$, con $l = 0, 1, 2, \ldots$

$\lambda = l\,(l+1)$, donde $l = 1, 2, \ldots$ autovalores, $y_l(x) = P_l(x)$ autofuciones,

Siendo $P_l(x)$ los polinomios de Legendre.

En general $\lambda = l\,(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ autovalores, $y_l(x) = P_l(x)$ autofuciones.

Ver Churchill, R.V. (1941) y Kreyszig (1991).

9.4.6 Observación: En todos los ejemplos vistos se admitió, sin justificación, que los autovalores solo podían ser números reales y discretos, y dentro de los resultados vimos que las autofunciones obtenidas pertenecían a conjuntos ortogonales conocidos, y que a su vez, en los casos estudiados, si a tales autovalores se los ordenaba de manera que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, entonces resultaba $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Para comprobar que esto vale en general analizamos el siguiente:

9.4.7 Teorema:

1) Todo problema de Sturm – Liouville $\mathcal{L}\,[y(x)] = \lambda\, y(x)$ tiene autovalores reales.

2) Si $\lambda_2 \neq \lambda_1$ son dos valores propios de un problema de Sturm – Liouville con autofunciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ respectivamente, entonces $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son ortogonales con el producto escalar:

$$< y_1(x), y_2(x) > \; = \int_a^b \rho(x)\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx$$

3) Todo problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde regulares o periódicas tiene un número infinito numerable de autovalores aislados. Si se los ordena como: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, entonces resulta $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

4) Para un problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde regulares, dos autofunciones correspondientes a un mismo autovalor son múltiplos una de otra.

Para probar 1) y 2) solo basta probar que el operador: $\mathcal{L} = -1/\rho(x)\; d/dx\, [\, p(x)\; d/dx\,] - q(x)/\rho(x)$, es hermítico con el producto escalar mencionado. Por lo tanto escribimos:

$$< \mathcal{L}\,[y_1(x)], y_2(x) > \; = -\int_a^b y_1(x)\; d/dx[p(x)\; dy_2/dx]\; dx - \int_a^b y_1(x)\; q(x)\; y_2(x)\; dx =$$

$$= -p(x)\, y_1(x)\, dy_2/dx] - \int_a^b p(x)\; dy_1/dx\; dy_2/dx\; dx - \int_a^b q(x)\; y_1(x)\; y_2(x)\; dx =$$

$$= -p(x)\, y_1(x)\, dy_2/dx] - p(x)\, dy_1/dx\; y_2(x)] - \int_a^b d/dx[p(x)\; dy_1/dx]\; y_2(x)\; dx - \int_a^b q(x)\; y_1(x)\; y_2(x)\; dx =$$

$$= -p(x)\; W(y_1,y_2)\,(x)\,] + < y_1(x), \mathcal{L}\,[y_2(x)] > \; = p(b)\; W(y_1,y_2)(b) - p(a)\; W(y_1,y_2)(a) + < y_1(x), \mathcal{L}\,[y_2(x)] >$$

Vemos que para las condiciones regulares o periódicas del problema de Sturm – Liouville los dos primeros términos se anulan pues:

$$\begin{cases} y_1(a)\,\alpha_1 + y_1'(a)\,\alpha_2 = 0, \\ y_2(a)\,\alpha_1 + y_2'(a)\,\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Admite solución α_1, α_2 no trivial, debe cumplirse (Roche – Frobenius) que

$$\Delta(y_1,y_2)(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = W(y_1,y_2)(a) = 0.$$

$$\begin{cases} y_1(b)\,\beta_1 + y_1'(b)\,\beta_2 = 0, \\ y_2(b)\,\beta_1 + y_2'(b)\,\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Admite solución β_1, β_2 no trivial, debe cumplirse que $\Delta(y_1,y_2)(b) = W(y_1,y_2)(a) = 0$.

Para las periódicas resulta $p(b)\ W(y_1,y_2)(b) = p(a)\ W(y_1,y_2)(a)$.

Por lo tanto en estos dos primeros casos el operador $\mathcal{L}$ es hermítco.

¿Qué sucede en el caso singular?

Tipo 1:

$$\begin{cases} p(a)=0, & p(a)W(y_1,y_2)(a)=0 \\ y_1(b)\beta_1 + y_1'(b)\beta_2 = 0, & \\ y_2(b)\beta_1 + y_2'(b)\beta_2 = 0, & \Delta(y_1,y_2)(b)=W(y_1,y_2)(b)=0 \quad \text{por lo tanto} \quad p(b)W(y_1,y_2)(b)=0 \end{cases}$$

Tipo 2:

$$\begin{cases} y_1(a)\alpha_1 + y_1'(a)\alpha_2 = 0, & \Delta(y_1,y_2)(a)=W(y_1,y_2)(a)=0 \quad \text{por lo tanto} \quad p(a)W(y_1,y_2)(a)=0 \\ y_2(a)\alpha_1 + y_2'(a)\alpha_2 = 0, & \\ p(b)=0, & p(b)W(y_1,y_2)(b)=0 \end{cases}$$

Tipo 3:

$$\begin{cases} p(a)=0 & p(a)W(y_1,y_2)(a)=0 \\ p(b)=0 & p(b)W(y_1,y_2)(b)=0 \end{cases}$$

Para la parte 4), debemos tener en cuenta que la expresión $\mathcal{L}\,[y(x)] = \lambda\, y(x)$, se puede escribir:

$$d/dx[\,p(x)\ dy/dx\,] + [\,q(x) + \lambda\,\rho(x)\,]\,y = 0,$$

o sea que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea en el intervalo $a \le x \le b$, pues $p(x) > 0$, para $a < x < b$, mientras que $p(a) \neq 0$, y $p(b) \neq 0$, ya que no son condiciones de borde singulares. Por lo tanto y_1 e y_2 son dos soluciones de la misma (mismo λ) ecuación diferencial homogénea de segundo orden lineal homogénea, y además

$$\begin{cases} y_1(a)\,\alpha_1 + y_1'(a)\,\alpha_2 = 0, \\ y_2(a)\,\alpha_1 + y_2'(a)\,\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

De manera que $W(y_1,y_2)(a) = 0$, y, por un resultado de las soluciones de las EDO, sabemos que dichas soluciones deben ser linealmente dependientes en $a \le x \le b_1 < b$. En forma análoga con

$$\begin{cases} y_1(b)\,\beta_1 + y_1'(b)\,\beta_2 = 0, \\ y_2(b)\,\beta_1 + y_2'(b)\,\beta_2 = 0 \end{cases}$$

tenemos que $W(y_1,y_2)(b) = 0$, y, por un resultado de las soluciones de las EDO, sabemos que dichas soluciones deben ser linealmente dependientes en $a < a_1 \leq x \leq b$. Por lo tanto $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes para $a \leq x \leq b$. Entonces será $y_2(x) = c\, y_1(x)$, o bien $y_1(x) = c\, y_2(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Referencias

Balanzat, M. (1994). *Matemática avanzada para la física*. CABA. Argentina. EUDEBA

Churchill, R.V. (1941). *Fourier series and boundary value problems*. New York. E.U.A. Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

Courant, R. y Hilbert D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Volume I. New York. E.U.A. Interscience Publishers Inc.

Halmos, P.R. (1972). *Introduction to Hilbert Space and the theory of spectral multiplicity*. New York. E.U.A. Chelsea Publishing Company.

Hildebrand, F.B. (1973). *Métodos de la matemática aplicada*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Ince, E.L. (1956). *Ordinary differential equations*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Kolmogorov, A.N. y Fomin, S.V. (1972).*Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Kreyszig, E. (1991). *Matemáticas avanzadas para ingenieros*. Volumen I. México. DF. México. Editorial Limusa.

Stephenson, G. (1982). *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Barcelona. España. Editorial Reverté, S.A.

CAPÍTULO 10
Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Matias Rafti

¡Ha vuelto la piba
que un día se fuera
cuando no tenía
quince primaveras!
¡Hoy tiene un purrete
y lo han bautizao!
Por eso es que bailan
los cosos de al lao

M.Larosa, J.Canet; LOS COSOS DE AL LAO.

10.1 Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (EDP)

Una ecuación a derivadas parciales (EDP) de orden n en m variables independientes $(x_1, x_2, ..., x_m)$ es una ecuación de la forma

$$g(x_1, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}) = 0$$

La soluciones en un dominio $\Omega \subset R^n$, serán funciones $u = u(x_1, x_2, ... x_m)$ suficientemente derivables tal que satisfacen dicha ecuación.
Consideraremos en primer lugar la reducción al caso de dos variables ($m = 2$), llamando $x = x_1$, $y = x_2$, la EDP queda

$$g(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}) = 0$$

10.2 EDP de primer orden lineales

Entenderemos como EDP de primer orden lineal, en dos variables independientes (x, y), a una ecuación de la forma

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u)$$

llamando homogéneas, a aquellas en que $f \equiv 0$, y al resto inhomogéneas.

Ejemplo 1: Consideramos el caso simple de la EDP $\partial u / \partial x = 0$, que como ya se vio en otros cursos, admiten soluciones $u(x,y) = \varphi(y)$, donde φ es una función derivable arbitraria.

¿Qué ocurre si se tiene la EDP $a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u)$?

Suponemos que $|a(x,y)| + |b(x,y)| \neq 0$, pues si $a(x,y) \equiv b(x,y) \equiv 0$, da $f(x,y,u) = 0$, que es una solución implícita.

Una forma de abordar este problema es buscando un cambio de variables,

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

es decir pasar de las variables (x, y) a otras (ξ, η), con la idea que la EDP en las nuevas variables sea más sencilla. Entonces la función incógnita $u(x, y)$ pasa a ser $U(\xi, \eta)$, y la EDP se transformará en:

$$A(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \xi} + B(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \eta} = F(\xi,\eta,U)$$

Aquí "más sencilla" significa conseguir, si se puede, que $B = A = 0$, en cuyo caso quedaría la expresión $F(\xi,\eta,U) = 0$, que es una forma implícita de la solución. ¿Podremos conseguir esto? Al menos lo intentaremos.

Calculando las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

La EDP se transformará en: $\left(a\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + b\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)\dfrac{\partial U}{\partial \xi} + \left(a\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + b\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)\dfrac{\partial U}{\partial \eta} = F$

Por lo tanto: $A = a\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + b\dfrac{\partial \xi}{\partial y}$

$$B = a\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

¿Qué significado tienen estas nuevas variables ξ, η? ¿Cómo interpretar $U(\xi,\eta)$ como solución? Si se busca evaluar la magnitud u en un punto P_0, si se conoce $u = u(x,y)$ en la región $\Omega \subset R^2$, que contiene a P_0, lo que se puede hacer es primero trazar rectas verticales $x = c_1$, hasta encontrar una, $x = x_0$, que pasa por P_0; y luego trazar rectas horizontales $y = c_2$, hasta encontrar una, $y = y_0$, que también pasa por P_0. Entonces al punto P_0 se le asocia el par (x_0,y_0) de manera que la magnitud buscada es $u_0 = u(x_0,y_0)$, y decimos que (x_0,y_0) son las coordenadas del punto P_0.

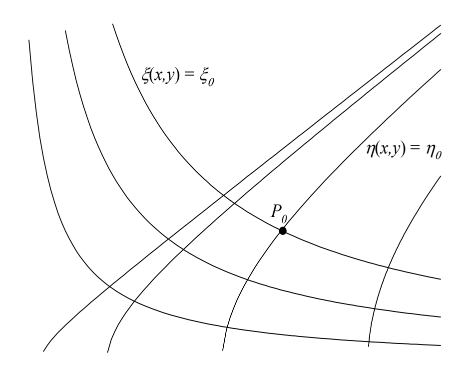


Figura 10.1 *Cada punto P_0 se puede asociar a coordenadas características (ξ_0,η_0).*

Si lo que en realidad obtenemos es $U = U(\xi,\eta)$, ¿cómo deberíamos calcular su valor en P_0? En principio podemos proceder de la misma forma: primero trazar curvas $\xi = c_1$, hasta encontrar una, $\xi(x,y) = \xi_0$, que pasa por P_0; y luego trazar las curvas $\eta = c_2$, hasta encontrar una, $\eta(x,y) = \eta_0$, que también pasa por P_0. Entonces al punto P_0 le asociamos el par (ξ_0,η_0) y la magnitud buscada es $U_0 = U(\xi_0,\eta_0)$, y si podemos lograr esto decimos que (ξ_0,η_0) son las coordenadas características del punto P_0 correspondiente a la EDP propuesta.

No siempre cualquier par de curvas $\xi(x,y) = c_1$ y $\eta(x,y) = c_2$ se cortan en un solo punto, es decir pasan por P_0 con distintas pendientes. Entonces ¿Qué condiciones debe cumplir la transformación para que esto suceda?

Sabemos de cursos previos que las transformaciones deben ser diferenciables y deben tener inversa en regiones de áreas no nulas, una forma de asegurar esto es pidiendo que no se anule el jacobiano de la transformación, es decir:

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$$

Si comenzamos buscando que $A = a\ \partial\xi/\partial x + b\ \partial\xi/\partial y = 0$, podemos observar que solo interviene la variable ξ, entonces trataremos de encontrar las coordenadas $\xi(x,y) = \xi_0$ que la satisfagan. De la condición del jacobiano sabemos que o bien $\partial\xi/\partial x \neq 0$, o bien $\partial\xi/\partial y \neq 0$, supongamos que $\partial\xi/\partial y \neq 0$, es decir que la curva $\xi(x,y) = \xi_0$ dada en forma implícita, que si la escribimos en forma explícita como $y = y(x)$, resulta $\xi(x, y(x)) = \Xi(x) = \xi_0$. En este caso a lo largo de dicha curva se tiene:

$$\frac{d\xi_0}{dx} = 0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \quad \text{osea :} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

y $A = 0$ queda: $$A(\xi,\eta) = \left[a(x,y) - b(x,y)\frac{dy}{dx}\right]\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

que implica: $a(x,y)\,dx - b(x,y)\,dy = 0$

de manera que sus soluciones $y = y_1(x)$, determinarán las curvas $\xi(x,y) = \xi_0$.

Nota: no se plantea el otro caso, $\partial\xi/\partial x \neq 0$, por ser equivalente, con solo tomar la forma explícita como $x = x(y)$, llegando finalmente a la ecuación $b(x,y)\,dy - a(x,y)\,dx = 0$

Con este procedimiento conseguimos que $A = 0$, ahora deberíamos hacer $B = 0$. Como en la expresión de B solo interviene la variable η, podremos intentar hacer lo mismo para que las curvas $\eta(x,y) = \eta_0$ anulen a B. Asumiendo ahora que $\partial\eta/\partial y \neq 0$, estas curvas las escribimos como $y = y_2(x)$, para distinguirlas de $y = y_1(x)$, que correspondían a $\xi(x,y) = \xi_0$. Así llegamos a

$$B(\xi,\eta) = \left[a(x,y) - b(x,y)\frac{dy}{dx} \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

que implica:

$$a(x,y)\,dx - b(x,y)\,dy = 0$$

Pero esta es la misma ecuación diferencial con la que se obtuvo $y_1(x)$, por lo tanto $y_1(x)$ e $y_2(x)$, o lo que es lo mismo, $\xi(x,y) = \xi_0$ y $\eta(x,y) = \eta_0$, son paralelas, condición prohibida para las coordenadas características.

Por lo tanto concluimos que el cambio de variables propuesto solo permitirá eliminar una de las dos magnitudes, A o B, pero no ambas. Si bien esto no permite alcanzar la solución, al menos simplifica la ecuación, llevándola a la expresión:

$$B(\xi,\eta)\frac{\partial U}{\partial \eta} = F(\xi,\eta,U)$$

y dado que $B \neq 0$, queda
$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = G(\xi,\eta,U)$$

10.2.1 Observación: Si bien se razonó de una forma que permitió reducir la EDP, también podíamos haber llegado a la conclusión que era imposible conseguir una transformación que hiciera simultáneamente $A = 0$ y $B = 0$, por ejemplo con el sistema de ecuaciones:

$$A = a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$B = a\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

La primer ecuación nos dice que las curvas de nivel $\xi(x,y) = \xi_0$ son paralelas al vector $(a,\ b)$, pues dicho vector es perpendicular a $\nabla\xi(x,y)$, mientras que la segunda ecuación dice lo mismo para las curvas de nivel $\eta(x,y) = \eta_0$. Por lo tanto la conclusión final es que ambas curvas $\xi(x,y) = \xi_0$ y $\eta(x,y) = \eta_0$ son paralelas. Condición prohibida para las curvas características.

Otra forma equivalente es considerar ambas ecuaciones como un sistema lineal homogéneo en que $a(x,y)$ y $b(x,y)$ son las incógnitas, entonces, como la condición $a(x,y) \equiv b(x,y) \equiv 0$ estaba descartada, el determinante de dicho sistema debe ser cero, pero tal determinante esta dado por $(\partial\xi/\partial x)(\partial\eta/\partial y) - (\partial\xi/\partial y)(\partial\eta/\partial x)$, el jacobiano de la transformación, pero una transformación derivable y con inversa debe tener jacobiano no nulo, en otras palabras (Rouche-Frobenius) debería haber una única solución, que sería $a(x,y) \equiv b(x,y) \equiv 0$.

El problema de estos razonamientos, si bien son elegantes, no dan la forma de eliminar al menos A o B.

10.2.2 Ejemplo 1: Tratar de resolver la EDP lineal homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

En este caso tenemos $a = 1$, $b = -v$, $f \equiv 0$. Entonces:

Curvas $\xi(t,x) = \xi_0$, son soluciones de la ecuación diferencial $dx - v\,dt = 0$, o sea $x - vt = c_1 = \xi_0$, por lo tanto $\xi(t,x) = x - vt$, con lo que finalmente la EDP queda como: $\partial U/\partial \eta = 0$, cuya solución se encontró en el Ejemplo 1, es decir $U(\xi,\eta) = \varphi(\xi)$, donde φ es una función derivable arbitraria. Finalmente en términos de t e x, la solución queda como $u(t,x) = \varphi(x - vt)$, donde φ es una función derivable arbitraria. Además observamos que si t representa el tiempo y x una de las coordenadas espaciales, la solución puede interpretarse como una perturbación que se propaga, sin deformación, a velocidad v en la dirección de x creciente.

10.2.3 Nota: Veremos que así como cada solución general de una EDO de orden n dependía de n constantes (parámetros), como $y = f(x,c_1, c_2, \ldots c_n)$, las EDP de orden n dependerán de n funciones arbitrarias, o sea $u = u(x,y,\varphi_1,\varphi_2,\ldots \varphi_n)$.

Para un enfoque más completo de las EDP de primer orden lineales ver por ejemplo: Alonso (1995), Courant (1953), Elsgoltz (1977), Sneddon (1957),

10.4 EDP de segundo orden lineales

Una ecuación a derivadas parciales (EDP) de segundo orden en dos variables independientes, lineal es de la forma:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

y en caso que $f \equiv 0$ se denomina homogénea.

Como en las EDP de primer orden, para resolverla (o al menos transformarla en una más sencilla o reducida) se busca un cambio de variables, y pasar de (x, y) a (ξ, η), entonces $u(x, y)$ se transforma en $U(\xi, \eta)$,

$$A(\xi,\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\,B(\xi,\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta} + C(\xi,\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = F\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial \xi},\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

Más sencilla significa buscar un cambio de variables que haga, si es posible, $A \equiv B \equiv C \equiv 0$, transformándose en ese caso en una EDP de primer orden. Para esto debemos saber cuánto valen A, B y C. Se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y}$$

Reemplazando en la EDP y comparando con la nueva queda:

$$A(\xi,\eta)=a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\,b(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$C(\xi,\eta)=a(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2\,b(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+c(x,y)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

$$B(\xi,\eta)=a(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+2\,b(x,y)\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right]+c(x,y)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

10.4.1 Nota: Si la ecuación diferencial inicial no está reducida, entonces $a(x,y)$ y $b(x,y)$ no pueden ser nulos simultáneamente, y si fuera $a(x,y) = 0$, podemos permutar los nombres de la variables independientes (son arbitrarios), de manera que siempre tomaremos $a(x,y) \neq 0$.

Nuevamente vemos que en A solo interviene la variable ξ, por lo tanto, para eliminar A comenzamos buscando las curvas $\xi(x,y) = \xi_0$, suponemos que $\partial \xi / \partial y \neq 0$, es decir que la curva $\xi(x,y) = \xi_0$ dada en forma implícita quedará $y = y(x)$ en forma explícita. En este caso resulta $\xi(x, y(x)) = \xi_0$, y determina $\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$, esdecir $\frac{\partial \xi}{\partial x}=-\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, quedando entonces

$$A(\xi,\eta)=\left[a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\,b(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)+c(x,y)\right]\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2=0$$

Luego: $a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\,b(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)+c(x,y)=0$ equivale a $A(\xi,\eta)=0$

$$y'(x)=\frac{b(x,y)\pm\sqrt{b(x,y)^2-a(x,y)\,c(x,y)}}{a(x,y)}$$, que permite obtener $y = y(x)$.

10.4.2 Observación: Si $\partial \xi / \partial y = 0$ deberá ser $\partial \xi / \partial x \neq 0$, en este caso se busca $x = x(y)$ con un razonamiento análogo.

A la cantidad $\Delta(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)\,c(x,y)$, se la llama discriminante de la EDP, y veremos que desempeña un papel importante en su clasificación.

10.4.3 Observación: Si se pretende lograr $C(\xi,\eta) = 0$, vemos que las ecuaciones para $\eta(x,y) = \eta_0$ son equivalentes a las de $\xi(x,y) = \xi_0$, y las curvas características $y(x)$ tendrán los valores de $y'(x)$ iguales a los obtenidos en la ecuación anterior. ¿Cómo se puede resolver esto? Vemos que en realidad no hay un solo valor para $y'(x)$, sino que se tiene uno tomando el signo mas, y otro tomando el signo menos. Entonces podemos adoptar, por ejemplo, el primero para obtener las curvas características $\xi(x,y) = \xi_0$ y el segundo para las $\eta(x,y) = \eta_0$, en este caso, si bien anulamos A y C no podemos anular B. Ahora bien ¿Qué sucede si el discriminante (término entre corchetes) es cero? En este caso solo podríamos anular A y nos quedaría una curva

característica libre. Y ¿qué pasa si el discriminante es negativo?. Obviamente el discriminante juega un rol importante y lo vamos a utilizar para clasificar los distintos casos.

De acuerdo al signo del discriminante $\Delta(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)\,c(x,y)$ existen tres casos posibles:

1) $\Delta > 0$, caso hiperbólico, podemos obtener dos curvas $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$, que hacen $A \equiv C \equiv 0$ y la nueva ecuación queda:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \, \partial \eta} = G\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)$$

Esta expresión se conoce como primera forma canónica de la EDP, y haciendo el cambio de variables:

$$\begin{cases} \xi' = \eta + \xi \\ \eta' = \eta - \xi \end{cases}$$

Se obtiene la segunda forma canónica dada por:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi'^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta'^2} = G\left(\xi', \eta', U, \frac{\partial U}{\partial \xi'}, \frac{\partial U}{\partial \eta'} \right)$$

2) $\Delta = 0$, caso parabólico, podemos obtener la curva $y = y_1(x)$ que hacen $A \equiv 0$. En este caso se tiene por un lado $y'(x) = b(x,y) / a(x,y)$, y por otro $\partial \xi / \partial x = y'(x)\ (\partial\xi/\partial y)$, de ambas expresiones resulta entonces que $a(x,y)\ \partial\xi/\partial x + b(x,y)\ \partial\xi/\partial y = 0$, y entonces $B(\xi,\eta)$ se reduce a

$$B(\xi,\eta) = [\ b(x,y)\ \partial\xi/\partial x + c(x,y)\ \partial\xi/\partial y\ ]\ \partial\eta/\partial y,$$

Como la EDP no está reducida entonces $a(x,y) \neq 0$, y resulta:

$$B(\xi,\eta) = (b/a)\ [\ a(x,y)\ \partial\xi/\partial x + b(x,y)\ \partial\xi/\partial y\ ]\ \partial\eta/\partial y \equiv 0,$$

Entonces como $B(\xi,\eta) \equiv 0$, se puede elegir η arbitraria, por ejemplo $\eta(x,y) = x$, o bien $\eta(x,y) = y$ siempre que cumpla la condición que la transformación sea admisible (cortar las curvas $\xi(x, y) = \xi_0$ en un punto). La EDP se reduce a:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = G\left(\xi, x, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)$$

3) $\Delta < 0$, caso elíptico, quedan dos expresiones complejas conjugadas $\zeta(x,y) = \zeta_0$ y $\zeta^*(x,y) = \xi_0^*$ Ponemos $\zeta(x,y) = \xi(x,y) + i\ \zeta(x,y)$. La expresión $A(\zeta, \zeta^*) = 0$, corresponde a dos igualdades, una para la parte real y otra para la parte imaginaria. La parte real igual a cero es:

$$a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2\,b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left[a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2\,b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] = 0$$

y la parte imaginaria igual a cero es:

$$a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + 2\,b\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0$$

En otras palabras si se toma $\xi(x,y) = Re\{\zeta(x,y)\}$, $\eta(x,y) = Im\{\zeta(x,y)\}$ con las curvas características $\xi(x,y) = \xi_0$ y $\eta(x,y) = \eta_0$, resulta $C \equiv A$ y $B \equiv 0$, entonces la EDP queda:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = G\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)$$

Ver más detalles en Smirnov (1975) y Tijonov (1980).

10.5 Breves nociones sobre distribuciones

Si ϕ es una función de R en R, se define el **soporte** de ϕ, $sop(\phi)$ al conjunto cerrado más pequeño tal que ϕ se anula fuera de él. Es decir si $x \notin sop(\phi)$ entonces $\phi(x) = 0$.

Nota: Tener en cuenta que $\phi(x) = 0$ no necesariamente significa que $x \notin sop(\phi)$. Lo cierto es que si $\phi(x) \neq 0$ entonces $x \in sop(\phi)$.

10.5.1 Ejemplo: Dados dos números reales $\alpha < \beta$, definimos la función $\phi_{\alpha\beta}$ como:

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq \alpha \\ exp\ \{-1/[(x-\alpha)(\beta-x)]\} & \text{si} \quad \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \beta \end{cases}$$

Vemos entonces que $sop(\phi_{\alpha\beta}) = [\alpha, \beta]$, y aunque $\alpha \in sop(\phi_{\alpha\beta})$, sin embargo $\phi_{\alpha\beta}(\alpha) = 0$.

10.5.2 El espacio $\mathcal{D}$

Consideramos el espacio $\mathcal{D} = \{ \phi : R \to R,\ \phi \in C^{\infty}(R),\ sop(\phi)$ acotado$\}$

Es decir, todas las funciones de R en R, que admiten derivada continua de todo orden, y su soporte está contenido en algún intervalo finito.

$\mathcal{D}$ es obviamente un espacio vectorial sobre el que se puede definir convergencia:

Diremos que $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}$ sii 1) existe un intervalo $[a, b]$ tal que $sop(\phi_n) \subset [a,b]$

2) $\{\phi_n^{(k)}(x)\} \to \phi^{(k)}(x)$ uniformemente en $[a,b]$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Una función T definida de $\mathcal{D}$ en R, se dice que es continua en $\phi \in \mathcal{D}$ sii $T[\phi_n] \to T[\phi]$ en R para toda sucesión que cumpla $\{\phi_n\} \to \phi$ en $\mathcal{D}$.

10.5.3 Distribuciones regulares y singulares

Se llama distribución a toda función T lineal y continua de $\mathcal{D}$ en R, es decir

$T: \mathcal{D} \to R$

$\phi(x) \to T[\phi(x)]$

que cumple además:

1) $T[c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x)] = c_1 T[\phi_1(x)] + c_2 T[\phi_2(x)]$

2) Si $\phi_n \to \phi$ en $\mathcal{D}$ entonces $T[\phi_n(x)] \to T[\phi(x)]$ en R

Si para una distribución T existe una función f de R en R, acotada y continua a trozos en todo intervalo finito tal que

$$T[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \phi(x)\, dx,$$

diremos que dicha distribución es una distribución regular.

10.5.4 Ejemplo: A partir de la función escalón $e(x)$ dada por:

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se puede definir la distribución escalón E como:

$$E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e(x)\, \phi(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} \phi(x)\, dx$$

Las distribuciones que no son regulares se denominan distribuciones singulares.

10.5.5 Observación: Como el soporte de ϕ es acotado, la integral no es impropia.

10.5.6 Ejemplo: La distribución delta de Dirac Δ dada por

$$\Delta[\phi(x)] = \phi(0)$$

La distribución delta de Dirac es singular, pues si suponemos que existe una función $\delta(x)$, acotada y continua a trozos en todo intervalo finito, tal que

$$\Delta[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \phi(x)\, dx$$

entonces, como no todas las funciones de $\mathcal{D}$ cumplen $\phi(0)=0$, siempre es posible encontrar un intervalo $[\alpha ,\beta]$, donde, o bien $\delta(x) > 0$, o bien $\delta(x) < 0$, y tal que $0 \notin [\alpha ,\beta]$. Si consideramos la función $\phi_{\alpha\beta}(x)$ definida antes, tenemos por un lado que $\phi_{\alpha\beta}(0)= 0$, ya que $0 \notin [\alpha ,\beta]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \phi_{\alpha\beta}(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x)\, \phi_{\alpha\beta}(x)\, dx \neq 0 = \phi_{\alpha\beta}(0) = \Delta[\phi_{\alpha\beta}(x)]$$

Lo que prueba que Δ no es una distribución regular. Además de acuerdo al razonamiento desarrollado, vemos la imposibilidad de existencia de tal función $\delta(x)$, porque de existir debería cumplir:

1) $\forall x:\ x \neq 0,\ \delta(x) = 0$ y además 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

A pesar de todo lo dicho, algunos autores escriben la distribución Δ como si en realidad existiera $\delta(x)$, si bien se ha aclarado, a veces con el objetivo de abreviar la notación escribiremos como si en realidad existiera $\delta(x)$ y utilizaremos expresiones tan equivocadas como:

$$\Delta[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \phi(x)\, dx$$

10.5.7 Traslación de distribuciones

Si T es una distribución regular, es decir existe una función asociada f, se define la distribución trasladada de T en x_0, T_{xo} como

$$T_{xo}[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)\, \phi(x)\, dx$$

Pero entonces se debe cumplir que

$$T_{xo}[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \phi(x + x_0)\, dx = T\,[\phi(x + x_0)]$$

De manera que, para una distribución T cualquiera, se puede definir en general la traslación T_{xo} como:

$$T_{xo}[\phi(x)] = T\,[\phi(x + x_0)]$$

10.5.8 Ejemplos:

1) $$E_{xo}[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e(x - x_0)\, \phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e(x)\, \phi(x + x_0)\, dx = \int_{xo}^{\infty} \phi(x)\, dx = E[\phi(x + x_0)]$$

2) $$\Delta_{xo}[\phi(x)] = \Delta[\phi(x + x_0)] = \phi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, \phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \phi(x + x_0)\, dx$$

10.5.9 Derivadas de distribuciones

Si f es una función derivable, con derivada acotada y continua a trozos en todo intervalo finito, asociada a una distribución regular T, se define la derivada T' como:

$$T'[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, \phi(x)\, dx$$

Pero entonces se debe cumplir que

$$T'[\phi(x)] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \phi'(x)\, dx = -T[\phi'(x)]$$

De manera que, para una distribución cualquiera T, se puede definir en general la derivada T' de T como:

$$T'[\phi(x)] = -T[\phi'(x)]$$

Por lo tanto las distribuciones admiten derivadas de todo orden y se cumple que

$$T^{(k)}[\phi(x)] = (-1)^k\, T[\phi^{(k)}(x)]$$

10.5.10 Ejemplos:

1) La derivada de la distribución escalón:

$$E'[\phi(x)] = -E\,[\phi'(x)] = -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)\, dx = \phi(0) = \Delta[\phi(x)]$$

Por lo tanto $E' = \Delta$. Sin embargo, a pesar que la función $e(x)$ no es derivable en $x = 0$, algunos autores escriben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e'(x)\, \phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \phi(x)\, dx$$

o lo que es peor aún: $e'(x) = \delta(x)$. Si en algún momento, en el apuro y por querer abreviar, se nos deliza esta expresión en el texto, en realidad lo que estaremos queriendo decir es $E'[\phi(x)] = \Delta[\phi(x)]$, sepa el lector disculparnos.

2) La derivada de la distribución delta:

$\Delta'[\phi(x)] = -\Delta[\phi'(x)] = -\phi'(0)$

10.5.11 Trasformada de Fourier de distribuciones

Si T es una distribución regular, asociada a una función f, que admite como transformada de Fourier $F(s) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, se define transformada de Fourier $\mathcal{F}T$ de T como:

$$\mathcal{F}T[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\,\phi(s)\,ds$$

Pero entonces s, invirtiendo las integrales respecto a s y x, se debe cumplir que

$$\mathcal{F}T[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Phi(x)\,dx = T[\Phi(x)]$$

Donde $\Phi(x) = \mathcal{F}\{\phi(s)\}$ es la transformada de Fourier de $\phi(x)$. Hemos permutado los roles de x y s dados en la definición original. De manera que, para una distribución cualquiera T, se puede definir en general la transformada de Fourier $\mathcal{F}T$ de T como:

$$\mathcal{F}T[\phi(x)] = T[\mathcal{F}\{\phi(s)\}] = T[\Phi(x)]$$

10.5.12 Ejemplos:

La transformada de Fourier de la distribución delta:

$$\mathcal{F}\Delta[\phi(x)] = \Delta[\Phi(s)] = \Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1[\phi(x)]$$

Que en el apuro podría escribirse como: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,\delta(x)\,dx = 1$

10.5.13 Función de Green

Vimos que si $\mathcal{L}$ es un operador diferencial lineal de orden n, las soluciones de la EDO homogénea, $\mathcal{L}[y_h(x)] = 0$, forman un espacio vectorial de dimensión n y existen n soluciones linealmente independientes $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ siendo $a \le x \le b$.

Ahora queremos ver qué sucede con la EDO inhomogénea $\mathcal{L}[y(x)] = f(x)$.

Se llama función de Green del operador $\mathcal{L}$ a la distribución definida por $G(x,t)$ donde $a \le x \le b$, y $a < t < b$, siendo x un parámetro, que esta definida por:

$$\mathcal{G}[f(t)] = \int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt = y_{pi}(x)$$

Siendo $y_{pi}(x)$ una solución particular de la EDO inhomogénea $\mathcal{L}[y_{pi}(x)] = f(x)$.

De existir, la distribución $G(x,t)$ no es única, pues si $H(x,t) = G(x,t) + y_h(x)$, donde $y_h(x)$ es solución de la EDO homogénea, $\mathcal{L}[y_h(x)] = 0$, entonces $H(x,t)$ también es función de Green pues:

$$\mathcal{H}[f(t)] = \int_a^b H(x,t)\,f(t)\,dt = \int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt + y_h(x)\int_a^b f(t)\,dt = y_p(x) + c\,y_h(x),$$ entonces:

$\mathcal{L}\ \{\mathcal{H}[f(x)]\ \} = \mathcal{L}\ [y_{pi}(x)] + c\ \mathcal{L}\ [y_h(x)]\ = \mathcal{L}\ [y_{pi}(x)] = f(x).$

Buscamos la solución particular $y_{pi}(x)$ que cumpla las condiciones de borde $y_{pi}(b) = y_{pi}(a) = 0.$

Ya vimos que $\Delta_x\ [f(t)]\ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t)\ f(t)\ dt\ = \int_a^b \delta(x-t)\ f(t)\ dt\ = f(x),$ por otra parte tenemos la expresión:

$$\mathcal{L}\ [y_{pi}(x)] = \mathcal{L}\ [\int_a^b G(x,t)\ f(t)\ dt\ ] = \int_a^b \mathcal{L}\ [G(x,t)]\ f(t)\ dt\ = f(x\ ) = \int_a^b \delta(x-t)\ f(t)\ dt.$$

Resulta entonces que $\mathcal{L}\ [G(x,t)] = \delta(x-t)$ que es una EDO entre distribuciones.

10.5.14 Ejemplo: Obtener la Función de Green para el operador de Sturm – Liouville

$$\mathcal{L} = d/dx\ [\ p(x)\ dy/dx\ ] + q(x).$$

¿Cómo es $G(x,t)$ para que la $y_{pii}(x)$ cumpla las condiciones de borde $y_{pi}(b) = y_{pi}(a) = 0$?

Recordamos que el operador $\mathcal{L}$ actúa sobre x, tenemos que $\mathcal{L}\ [G(x,\ t)] = 0$ si $x < t$ o si $x > t$, y además cumple las condiciones $G(b,t) = G(a,t) = 0$, $G(x,t)$ como función de x, será solución de la EDO homogénea para $x < t$ con la condición $G(a,t) = 0$, y para $x > t$ con la condición $G(b,t) = 0$.

Buscamos por un lado una solución $y_1(x)$ de la EDO homogénea $\mathcal{L}\ [y_1(x)] = 0$, que a su vez cumpla $y_1(a) = 0$, $y_1'(a) \neq 0$, junto a otra solución $y_2(x)$ de la EDO homogénea $\mathcal{L}\ [y_2(x)] = 0$, que cumpla $y_2(b) = 0$, $y_2'(b) \neq 0$, de manera que podemos proponer:

$$G(x,t) = \begin{cases} c_1\ y_1(x) & \text{si} \quad a \le x < t < b \\ c_2\ y_2(x) & \text{si} \quad a < t < x \le b \end{cases}$$

¿Cuánto valen c_1 y c_2?

1) $G(x,\ t)$ debe ser contínua en $x = t$, es decir $c_1\ y_1(t) = c_2\ y_2(t)$.

2) Integrando desde $x - \varepsilon$ hasta $x + \varepsilon$ la ecuación $\mathcal{L}\ [G(x,\ t)] = \delta(x-t)$ queda:

$$p(t+\varepsilon)\ d/dx\ G(t+\varepsilon,\ t) - p(t-\varepsilon)\ d/dx\ G(t-\varepsilon,\ t) + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\ G(x,t)\ dx = 1.$$

Tomando ahora el límite para $\varepsilon \to 0$, como p, q, y G son funciones continuas, queda

$$d/dx\ G(t+,\ t) - d/dx\ G(t-,\ t) = 1/\,p(t), \qquad \text{es decir:} \qquad c_2\, y_2'(t) - c_1\, y_1'(t) = 1/\,p(t).$$

La solución del sistema:

$$\begin{cases} c_1\ y_1(t) - c_2\ y_2(t) = 0 \\ c_1\ y_1'(t) - c_2\ y_2'(t) = -\ 1/p(t) \end{cases}$$

$c_1 = y_2(t)\ /\ [\ p(t)\ W(y_1,y_2)(t)\ ]$, $c_2 = y_1(t)\ /\ [p(t)\ W(y_1,y_2)(t)\ ]$, donde $W(y_1,y_2)$ es el wronskiano de y_1,y_2.

Finalmente:

$$G(x,t) = \begin{cases} y_1(x)\ y_2(t)\ /\ [\ p(t)\, W(y_1,y_2)(t)\ ] & \text{si} \quad a \le x < t < b \\ y_2(x)\ y_1(t)\ /\ [\ p(t)\, W(y_1,y_2)(t)\ ] & \text{si} \quad a < t < x \le b \end{cases}$$

10.5.15 Ejercicios: Determinar las funciones de Green para las siguientes EDO:

1) $d/dx\ [\ x\ dy/dx] - (n^2/\,x)\ y = 0$ para $0 \le x < \infty$.

2) $d/dx\ [\ x^2\ dy/dx] + l\ (l+1)\ y = 0$ para $0 < a \le x \le b < \infty$.

3) $d/dx\ [\ x\ dy/dx\ ] + [(x^2 - m^2)/\ x^2]\ y = 0$ para $0 \leq x \leq a < \infty$.

Ver Hildebrand (1973).

Referencias

Alonso, I.P. (1995). *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Wilmington. E.U.A. Addison Wesley Iberoamericana.

Courant, R. y Hilbert D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Volume II. New York. E.U.A. Interscience Publishers Inc.

Elsgoltz L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y calculo variacional*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Hildebrand, F.B. (1973). *Métodos de la matemática aplicada*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Smirnov, M.M. (1975). *Problemas de ecuaciones de la física* matemática. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Sneddon, I.N. (1957). *Elements of Partial Differential Equations*. New York. E.U.A. México D.F. México. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Tijonov, A.N. y Samarsky, A.A. (1980). *Ecuaciones de la Física Matemática*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

CAPÍTULO 11

Soluciones de algunas EDP

José Luis Vicente

El día que me quieras
no habrá más que armonía.
Sera clara la aurora
y alegre el manantial.
Traerá quieta la brisa
rumor de melodía.
Y nos darán las fuentes
su canto de cristal.
C.Gardel, A.Lepera. EL DÍA QUE ME QUIERAS.

11.1 La ecuación de las ondas

11.1.1 Ejemplo: Problema de la cuerda vibrante.

Se considera una cuerda homogénea, sometida a una tensión T, que en equilibrio permanece en posición horizontal, coincidente con el eje x, desde $x = 0$, hasta $x = L$. Dicha cuerda se aparta levemente de la posición de equilibrio, en la dirección vertical, y se desea conocer su evolución en el tiempo. Para ello, estudiamos el comportamiento de un pequeño elemento de la cuerda que va de x a $x+dx$.

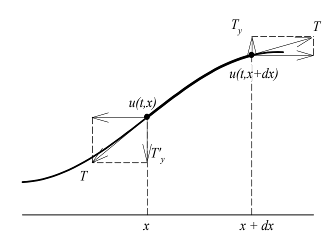


***Figura 11.1** Sector de la cuerda desde x a $x+ dx$, mostrando las componentes de la fuerza en los extremos*

• Fuerza neta en la dirección vertical que actúa sobre un elemento de cuerda es:

$$F_y = T'_y - T_y = T\, sen\, \alpha' - T\, sen\, \alpha \;\cong\; T\frac{\partial\, u(t, x+dx)}{\partial\, x} - T\frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, x} = T\left[\frac{\partial\, u(t, x+dx)}{\partial\, x} - \frac{\partial\, u(t,x)}{\partial\, x}\right]$$

$$F_y \cong T \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} dx$$

- Segunda ley de Newton:

Para una densidad lineal ρ, la masa del elemento de cuerda es $dm = \rho\, ds$, luego:

$$F_y = dm \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} dx$$

Donde consideramos la aproximación $ds = \sqrt{[\,1 + (dy/dx)^2]}\, dx \approx dx$

- Igualando ambas expresiones y llamando $v^2 = T/\rho > 0$, resulta:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0\,, \text{ para } 0 < x < L\,,\ t > 0,$$

denominada ecuación de las ondas homogénea en una dimensión.

- Si además sobre cada elemento actúa una fuerza externa por unidad de masa $f(t,x)$, entonces la ecuación queda:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x)\,, \text{ para } 0 < x < L\,,\ t > 0,$$

que se denomina ecuación de las ondas inhomogénea en una dimensión.
En la notación general

$$a(\,t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,b(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + c(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

se tiene: $a = 1$, $b = 0$, $c = -v^2$, por lo tanto $\Delta = b^2 - a\,c = v^2 > 0$, es de tipo hiperbólico.

11.1.2 EDP de tipo hiperbólico

Las ecuaciones de tipo hiperbólicas como la ecuación de las ondas en una dimensión, se escriben como:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x)\,, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0,x) = \varphi(x) & 0 < x < L, \text{ posicion inicial} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) & 0 < x < L, \text{ velocidad inicial} \end{cases}$$

y las condiciones de borde

$$\begin{cases} \alpha_1\, u(t,0) + \alpha_2\, \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \beta_1\, u(t,L) + \beta_2\, \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Se puede descomponer como

$$u(t,x) = u_h(t,x) + u_{pi}(t,x)$$

Donde es la solución de la ecuación homogénea:

$$\frac{\partial^2 u_h(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u_h(t,x)}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < L,\ t > 0,\ u_h(t,x) \neq 0$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_h(0,x) = \varphi(x) & 0 < x < L, \text{ posicion inicial} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial t}(0,x) = \psi(x) & 0 < x < L, \text{ velocidad inicial} \end{cases}$$

y las condiciones de borde

$$\begin{cases} \alpha_1 u_h(t,0) + \alpha_2 \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \beta_1 u_h(t,L) + \beta_2 \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Mientras que la in homogénea es:

$$\frac{\partial^2 u_{pi}(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u_{pi}(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x),$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_{pi}(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial u_{pi}}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

a) Caso homogéneo: En primer lugar buscaremos resolver el caso homogéneo, es decir cuando $f(x,t) \equiv 0$. Se tiene pues

$$\frac{\partial^2 u_h(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u_h(t,x)}{\partial x^2} = 0 \qquad u_h(t,x) \neq 0$$

Las condiciones iniciales son

$$\begin{cases} u_h(0,x) = \varphi(x) & 0 < x < L, \text{ posicion inicial} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial t}(0,x) = \psi(x) & 0 < x < L, \text{ velocidad inicial} \end{cases}$$

y las condiciones de borde fijo

$$\begin{cases} u_h(t,0) = 0, & t > 0 \\ u_h(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

o bordes libres

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

o más general

$$\begin{cases} \alpha_1 u_h(t,0) + \alpha_2 \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \beta_1 u_h(t,L) + \beta_2 \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Veamos el caso de bordes fijos. Como las condiciones están dadas para t y x constantes, utilizaremos el llamado método de separación de variables:

$$u(t,x) = T(t)\, X(x)$$

Las condiciones de borde quedan:

$$\begin{cases} u_h(t,0) = T(t)\,X(0) = 0, & \text{pero } u_h(t,x) \neq 0 \quad \text{por lo tanto } X(0) = 0 \\ u_h(t,L) = T(t)\,X(L) = 0, & \text{pero } u_h(t,x) \neq 0 \quad \text{por lo tanto } X(L) = 0 \end{cases}$$

Dividiendo la EDP $X\, d^2T/dt^2 - v^2\, T\, d^2X/dx^2 = 0$ por $v^2\, u_h(t, x) = v^2\, T(t)\, X(x) \neq 0$ resulta

$$(v^2\, T)^{-1}\, d^2T/dt^2 = X^{-1}\, d^2X/dx^2 = cte = -\lambda,$$ pues t y x son variables independientes.

Se separa en dos EDO

a) $d^2X/dx^2 = -\lambda X$

$0 < x < L$

con las condiciones de borde

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

Es un problema de Sturm – Liouville que ya resolvimos:

$$\lambda_n = k_n^{\,2} = (n\pi/L)^2, \qquad X_n(x) = sen\,(n\pi/L)\,x = sen\,k_n\,x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) $d^2T_n\,/dt^2 = -(k_n\,v)^2\,T_n$, cuya solución es $T_n(t) = a_n \cos(k_n\,v\,t) + b_n\,sen\,(k_n\,v\,t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Por lo tanto para cada n se tiene la solución:

$$u_n(t,x) = [\,a_n \cos(k_n\,v\,t) + b_n\,sen\,(k_n\,v\,t)\,]\,sen\,k_n\,x,$$

como el problema no tiene otro tipo de solución y es lineal, su solución general es de la forma:

$$u_h(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} [\,a_n \cos(k_n\,v\,t) + b_n\,sen\,(k_n\,v\,t)\,]\,sen\,k_n\,x,$$

Para determinar los valores de a_n y b_n de la solución particular buscada, debemos tomar en cuenta las condiciones iniciales:

$$u_h(0\,,x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,sen\,[(n\pi/L)\,x], \text{ entonces } a_n = 2/L \int_0^L \varphi(x)\,sen\,[(n\pi/L)\,x]\,dx$$

ademas como: $\partial u_h(t,x)/\partial t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\,v\,[\,-a_n\,sen(k_n\,v\,t) + b_n \cos(k_n\,v\,t)\,]\,sen\,k_n\,x$, resulta:

$$\partial u_h(0,x)/\partial t = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n v\;\; b_n\,sen\,[(n\pi/L)\,x] \qquad \text{entonces } b_n = 2/(k_n v\,L) \int_0^L \psi(x)\,sen\,[(n\pi/L)\,x]\,dx$$

Ver mas ejemplos en Collins (1968) y Smirnov (1975) y un enfoque mediante transformadas en Sneddon (1995) y Spiegel (1992).

11.1.3 Observación: Se buscó la solución de una EDP de tipo hiperbólico, pero en realidad era solo el caso homogéneo (no existía ninguna fuerza externa $f(x,t)$ sobre la cuerda). En este caso si se hubieran buscado las curvas características se tendrían $\xi = x + v\,t$, $\eta = x - vt$, y la EDP se transforma en $\partial[\partial U/\partial\eta]/\partial\xi = 0$, es decir que $\partial U/\partial\eta = h(\eta)$, por lo tanto $U(\xi,\eta) = f(\eta) + g(\xi)$, es decir que $u_h(t,x) = f(x - v\,t) + g(x + v\,t)$. Se tiene la superposición de dos ondas viajeras, una hacia la derecha (x crecientes) y otra hacia la izquierda (x decrecientes). Todo se reduce ahora a utilizar las condiciones iniciales y de borde para determinar las funciones f y g.

Ver por ejemplo Kreyszig (1991).

b) Caso inhomogéneo: Para calcular $u_{pi}(t,x)$, primero vamos a escribir la solución de la EDP homogénea, $u_h(x,t)$, utilizando distribuciones.

La EDP de tipo hiperbólico homogénea permite, mediante el cambio de variables:

$$\begin{cases} \xi = x - v\,t \\ \eta = x + v\,t \end{cases}$$

Permite escribir la solución general como $U(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$, o sea $u_h\,(t,x) = f(x - v\,t) + g(x + v\,t)$.

¿Pero cuánto valen f y g? ¿Cómo dependen de la condiciones iniciales φ y ψ ?

Vemos que

$$\begin{cases} u_h(0,x) = \phi(x) = g(x) + f(x) \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial t}(0,x) = \psi(x) = v\,\left[\, g'(x) - f'(x)\,\right] \end{cases}$$

Entonces:

$$g(x) = ½\,\varphi(x) + 1/v \int_c^x \psi(x')\,dx', \text{ y}$$

$$f(x) = ½\,\varphi(x) - 1/v \int_c^x \psi(x')\,dx' = ½\,\varphi(x) + 1/v \int_c^x \psi(x')\,dx'$$

Queda pues:

$$u_h\,(t,x) = f(x - v\,t) + g(x + v\,t) = ½\,[\,\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)] + {}^{1}/_{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x')\,dx'$$

Por otra parte la solución $u_h\,(x,t)$ se puede considerar la suma de dos soluciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ tal que:

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

$$\begin{cases} u_1(0,x) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u_1\,(t,x) = ½\,[\,\varphi(x + vt\,) + \varphi(x - vt)] = \int_{-\infty}^{\infty} ½\,[\,\delta(\,x\text{-}x'\text{+}\,vt) + \delta(\,x\text{-}x'\text{–}\,vt)]\,\varphi(x')\,dx',$$

Abreviada como

$$u_1\,(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K^*(t,\,x\text{-}x')\,\varphi(x')\,dx',$$

Resulta

$$K^*(t,x) = ½\,[\,\delta(\,x\text{+}\,vt) + \delta(\,x\text{–}\,vt)]$$

De las expresiones

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) K^*(t,x - x')\right]\varphi(x')\,dx' = 0$$

$$u_1\,(0,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K^*(0,\,x\text{-}x')\,\varphi(x')\,dx' = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\,x - x')\,\varphi(x')\,dx',$$

$$\partial K^*(0,x)/\partial t = (\partial/\partial t\,)\,[½\,[\,\delta(\,x\text{-}x'\text{+}\,vt) + \delta(\,x\text{-}x'\text{–}\,vt)]\,]_{\,t=0} = v/2\,[\,\delta(x) - \delta(x)] = 0$$

Queda entonces:

$$\frac{\partial^2 K^*(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 K^*(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

$$\begin{cases} K^*(0,x) = \delta(x) \\ \dfrac{\partial K^*}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Análogamente

$$u_2(t,x) = {}^1\!/_{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x')\, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} {}^1\!/_{2v}\ [\,(e(x-x'+vt) - e(x-x'-vt)]\ \psi(x')\, dx',$$

Abreviada como

$$u_2(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-x')\ \psi(x')\, dx',$$

Resulta

$$K(t,x) = ½\ [\ e(x+vt) - e(x-vt)]$$

De las expresiones

$$\frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) K(t, x-x') \right] \psi(x')\, dx' = 0$$

$$K(0,x) = ½\ [\ e(x) - e(x)] = 0$$

$$\partial u_2(0,x)/\partial t = \int_{-\infty}^{\infty} \partial K(0, x-x')/\partial t\ \psi(x')\, dx' = \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\ \psi(x')\, dx',$$

Queda entonces:

$$\frac{\partial^2 K(t,x)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 K(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

$$\begin{cases} K(0,x) = 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial t}(0,x) = \delta(x) \end{cases}$$

La distribución $K(t, x)$ se denomina solución fundamental.

De manera que la solución $u_h(t, x)$ se puede escribir finalmente como:

$$u_h(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K^*(t, x-x')\ \varphi(x')\, dx' + \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-x')\ \psi(x')\, dx'$$

Ahora proponemos como solución particular de la EDP inhomogénea la expresión:

$$u_{pi}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t', x-x')\ f(t', x')\, dt'dx'$$

¿Quién es entonces la distribución $G(t,x)$? ¿Qué ecuación diferencial satisface? Por un lado sabemos que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_{pi}(t,x) = f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\ \delta(t-t')\ f(x',t')\, dx'dt'$$

Pero por otra parte se tiene que cumplir:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_{pi}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(t-t', x-x')\right] f(t',x')\ dt'\ dx'$$

De manera que $G(t, x)$ satisface la ecuación diferencial (en el sentido de distribuciones):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(t)\,\delta(x)$$

De acuerdo a las características de la distribución $K(t,x)$, probaremos que $G(t,x) = K(t,x)\ e(t)$, donde $e(t)$ es en realidad la distribución escalón, es decir escribiremos $e'(t) = \delta(t)$. Entonces calculamos:

$$\partial[K(t,x)\ e(t)]/\partial t = \partial K(t,x)/\partial t\ e(t) + K(t,x)\ e'(t) = \partial K(t,x)/\partial t\ e(t) + K(t,x)\ \delta(t) =$$

$$= \partial K(t,x)/\partial t\ e(t) + K(0,x)\ \delta(t) = \partial K(t,x)/\partial t\ e(t)$$

$$\partial^2[K(t,x)\ e(t)]/\partial t^2 = \partial/\partial t\ [\partial K(t,x)/\partial t\ e(t)] = \partial^2 K(t,x)/\partial t^2\ e(t) + \partial K(t,x)/\partial t\ e'(t) =$$

$$= v^2\partial^2 K/\partial x^2\ e(t) + \partial K(0,x)/\partial t\ \delta(t) = v^2\partial^2 K/\partial x^2\ e(t) + \partial K(0,x)/\partial t\ \delta(t) = v^2\partial^2[K(t,x)\ e(t)]/\partial x^2 + \delta(x)\delta(t)$$

Lo que termina probando que efectivamente $G(t,x) = K(t,x)\ e(t)$, es decir que la expresión para $u_{pi}(t,x)$ es correcta.

La distribución $G(t,x)$ hay gente que la llama función de Green del problema (aunque sea una distribución).

11.2 La ecuación de difusión

11.2.1 Ejemplo: Problema de difusión térmica.

Consideramos un elemento de volumen dV en un cuerpo cuyo volumen total es V, si la densidad es ρ, entonces la masa de dicho elemento está dada por $dm = \rho\ dV$, suponemos además que está en equilibrio a una temperatura T, y en un instante dado se produce un cambio de temperatura de $T \rightarrow T + dT$, queremos saber como varía la temperatura con la posición y el tiempo, es decir queremos conocer la función $T = T(t,x,y,z)$.

Vamos ha estudiar el balance térmico primero en dicho elemento de volumen, y luego en el volumen total.

El cambio de temperatura en dV produce una cantidad de calor δQ proporcional a la masa dm, y a la variación de temperatura dT, es decir $\delta Q = c\ dm\ dT = c\rho\ dT\ dV$, siendo c la capacidad calorífica del cuerpo en ese lugar.

De manera que si queremos medir la cantidad total de calor Q en todo el volumen V, debemos sumar todas las contribuciones δQ, y si en realidad lo que nos interesa es la variación de dicha cantidad de calor con el tiempo, debemos evaluar tal variación. Es decir:

$$dQ/dt = d/dt \iiint_V c\ \rho\ dT\ dV$$

Suponemos además que tanto el volumen total, como la capacidad calorífica y la densidad no varían en el tiempo, o sea que $V = cte$, $c \neq c(\partial t)$, $\rho \neq \rho(\partial t)$, resulta:

$$dQ/dt = \iiint_V c\,\rho\,\partial T/\partial t\ dV$$

¿A qué se debe estra variación? Fundamentalmente a dos causas, por un lado a las fuentes de calor, que generan una variación en la cantidad de calor por unidad de tiempo, y unidad de volumen w, debido por ejemplo a reacciones exo o endoérgicas, y a la pérdida de calor debido al flujo térmico $\boldsymbol{J}$ a traves de la superficie S que rodea al volumen V. Entonces, si $\boldsymbol{n}$ es el vector normal exterior a cada elemento de superficie dS, queda:

$$dQ/dt = \iiint_V c\,\rho\,\partial T/\partial t\ dV = \iiint_V w\,dV - \oiint_S \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_V w\,dV - \iiint_V div\,\boldsymbol{J}\,dV$$

Donde hemos aplicado el teorema de la divergencia a la integral de flujo a través de la superficie S. Como esta igualdad es independiente de las dimensiones del volumen V, resulta finalmente

$$c\,\rho\,\partial T/\partial t = w - div\,\boldsymbol{J}$$

Si los cambios de temperatura son suaves, podemos suponer que vale la ley de Fourier, es decir que $\boldsymbol{J} = -\,k\boldsymbol{\nabla} T$

Entonces la ecuación anterior queda: $c\,\rho\,\partial T/\partial t = w + div\,(k\boldsymbol{\nabla} T)$, por último suponemos que k no depende de (x,y,z) y dividimos todo por $c\,\rho$ para llegar a la expresión:

$$D\,\boldsymbol{\nabla}^2 T = \partial T/\partial t + g(t,x,y,z)$$

denominada ecuación de difusión, donde $D = k/(c\,\rho)$ es llamado coeficiente de difusión, y $g(t,x,y,z) = -\,w(t,x,y,z)/(c\,\rho)$, será llamado término de inhomogeneidad.

El caso unidimensional, cuando la temperatura varía solo en una dirección, o como puede ser en un cuerpo unidimensional como una varilla, la ecuación anterior se reduce a:

$$D\,\partial^2 T/\partial x^2 = \partial T/\partial t + g(t,x)$$

Llamando $u(t,x)$ a la expresión $T(t,x)$, la notación general

$$a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,b(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + c(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

además de $f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + g(t,x)$

se tiene: $a = 0$, $b = 0$, $c = D$, y por lo tanto resulta que $\Delta = b^2 - a\,c = 0$, o sea es de tipo parabólico.

11.2.2 EDP de tipo parabólico

Las ecuaciones de tipo parabólicas como la ecuación de difusión en una dimensión, se escribirá como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

La condición inicial

$u(0,x) = \varphi(x)$, $\quad 0 < x < L$ Temperatura inicial

y las condiciones de borde

$$\begin{cases} \alpha_1\, u_h(t,0) + \alpha_2\, \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \beta_1\, u_h(t,L) + \beta_2\, \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$ ya sea isotérmicas o adiabáticas

Se puede descomponer como:

$$u(t,x) = u_h(t,x) + u_{pi}(t,x)$$

Donde es la solución de la ecuación homogénea:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < L,\ t > 0,\ u_h(t,x) \neq 0$$

con la condición inicial

$$u_h(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < L$$

y las condiciones de borde

$$\begin{cases} \alpha_1\, u_h(t,0) + \alpha_2\, \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \beta_1\, u_h(t,L) + \beta_2\, \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Mientras que la in homogénea es:

$$\frac{\partial u_{pi}}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u_{pi}}{\partial x^2} = f(t,x)$$

con la condición inicial

$$u_{pi}(0,x) = 0,$$

a) Caso homogéneo: En primer lugar buscaremos resolver el caso homogéneo, es decir cuando $f(t,x) \equiv 0$. Se tiene pues

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < L,\ t > 0,\ u_h(t,x) \neq 0$$

Las condiciones iniciales son solo

$u_h(0,x) = \varphi(x), \quad 0 < x < L,$ distribución inicial

y las condiciones de borde isotérmicas

$$\begin{cases} u_h(t,0) = 0, & t > 0 \\ u_h(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$ o adiabáticas $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

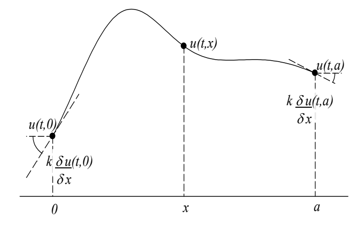


Figura 11.2 *Distribución de temperaturas en la barra, mostrando temperatura y flujo térmico en los extremos.*

Veamos el caso de bordes adiabáticas. Utilizando el método de separación de variables:

$$u_h(x,t) = X(x)\ T(t)$$

Las condiciones de borde quedan:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,0) = T(t)\ X'(0) = 0, & \text{pero } u_h(t,x) \neq 0 \quad \text{por lo tanto } X'(0) = 0 \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial x}(t,L) = T(t)\ X'(L) = 0, & \text{pero } u_h(t,x) \neq 0 \quad \text{por lo tanto } X'(L) = 0 \end{cases}$$

Dividiendo la EDP $X\ d^2T/dt^2 - v^2\ T\ d^2X/dx^2 = 0$ por $D\ u_h\ (t,x) = D\ T(t)\ X(x) \neq 0$ resulta

$$(D\ T)^{-1}\ d^2T/dt^2 = X^{-1}\ d^2X/dx^2 = cte = -\lambda, \quad \text{pues } t \text{ y } x \text{ son variables independientes.}$$

Se separa en dos EDO

a) $d^2X/dx^2 = -\lambda X$

$0 < x < L$

con las condiciones de borde

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

Es un problema de Sturm – Liouville que ya resolvimos:

$$\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2, \qquad X_n(x) = cos\ (n\pi/L)\ x = cos\ k_n\ x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) $dT_n/dt = -k_n^2\ D\ T_n$, cuya solución es $T_n(t) = a_n\ exp(-k_n^2\ D\ t)$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Por lo tanto para cada n se tiene la solución:

$$u_n(t,x) = a_n\ exp(-k_n^2\ D\ t)\ \ cos\ k_n\ x,$$

como el problema no tiene otro tipo de solución y es lineal, su solución general es de la forma:

$$u_h(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ exp(-k_n^2\ D\ t)\ \ cos\ k_n\ x,$$

Para determinar los valores de a_n de la solución particular buscada, debemos tomar en cuenta la condición inicial:

$$u_h(0,x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ exp(-k_n^2\ D\ t)\ \ cos\ k_n\ x, \quad \text{entonces} \quad a_n = 2/L \int_0^L \varphi(x)\ cos\ [(n\pi/L)\ x]\ dx$$

Ver mas ejemplos en Collins (1968) y Smirnov (1975) y un enfoque mediante transformadas en Sneddon (1995) y Spiegel (1992).

b) Caso inhomogéneo: Para calcular $u_{pi}(t,x)$, primero vamos a escribir la solución de la EDP homogénea, $u_h(t,x)$, utilizando distribuciones.

Escribimos $u_h(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x-x')\ \varphi(x')\ dx'$, y considerando el operador $\boldsymbol{L} = \partial/\partial t - D\ \partial^2/\partial x^2$,

donde $K(t,x)$ se llama solución fundamental y, análogamente a como se procedió con el caso hiperbólico, vemos que cumple:

$$\boldsymbol{L}\ [K(t,x)] = 0$$

$$K(0,x) = \delta(x)$$

¿Cómo calcular $K(t,x)$? Vamos a utilizar la transformada de Fourier, respecto a la variable x, en el sentido de distribuciones, que la escribimos como:

$$J(t,s) = F\,\{K(t,x))\} = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,x)\, e^{-i s x}\, dx,$$

y su inversa

$$K(t,x) = F^{-1}\{J(t,s)\} = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} J(t,s)\, e^{i s x}\, ds$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{L}\,[K(t,x)] = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] J(t,s)\, e^{i s x}\, ds = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial J}{\partial t} - D s^2\, J\right] e^{i s x}\, ds = 0$$

Entonces:

$\partial J/\partial t + D s^2 J = 0$, o sea $J^{-1}\partial J/\partial t = -D s^2$, tiene como solución $\ln J = -Dt\, s^2 + \ln S(s)$

De manera que para conocer $J(t,s) = S(s) \exp(-Dt\, s^2)$, hay que calcular $S(s)$, pero recordando que $K(0,x) = \delta(x)$, y usando la expresión de la transformada, queda:

$$J(0,s) = S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(0,x)\, e^{-i s x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-i s x}\, dx = 1$$

Así que $J(t,s) = \exp(-Dt\, s^2)$, y la antitransformada es ahora

$$K(t,x) = \Phi^{-1}\{J(t,s)\} = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Dt\, s^2 + i\, x\, s)\, ds = 1/2\pi\, \exp[-x^2/4Dt] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-Dt\,(s + i\, x/2Dt)^2]$$

ds

Resulta entonces

$$K(t,x) = 1/\sqrt{(4\pi Dt)}\, \exp(-x^2/4Dt)$$

Finalmente se propone como solución particular de la EDP inhomogénea la expresión:

$$u_{pi}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t', x-x')\, f(t',x')\, dt'dx'$$

¿Quién es entonces la distribución $G(t,x)$? ¿Qué ecuación diferencial satisface? Por un lado sabemos que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] u_{pi}(t,x) = f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')\, \delta(x-x')\, f(t',x')\, dt'\, dx'$$

Pero por otra parte se tendrá que cumplir que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] u_{pi}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{[\partial/\partial t - D\, \partial^2/\partial x^2] G(t-t', x-x')\}\, f(t',x')\, dt'dx'$$

De manera que $G(x,t)$ satisface la ecuación diferencial (en el sentido de distribuciones):

$$\left[\frac{\partial G}{\partial t} - D\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right] = \delta(t)\, \delta(x)$$

De acuerdo a las características de la distribución $K(t,,x)$, probaremos que $G(t,x) = K(t,x)\ e(t)$, donde $e(t)$ es en realidad la distribución escalón, es decir escribimos $e'(t) = \delta(t)$. Entonces:

$\partial[K(t,x)\ e(t)]/\partial t = \partial K(t,x)/\partial t\ e(t) + K(t,x)\ e'(t) = D\ \partial^2 K / \partial x^2\ e(t) + K(0,x)\ \delta(t) =$

$D\ \partial^2[K(t,x)\ e(t)]/ \partial x^2\ e(t) + \delta(t)\ \delta(x)$

Lo que termina probando que efectivamente $G(t,x) = K(t,x)\ e(t)$, es decir que la expresión para $u_{pi}(t,x)$ es correcta.

La distribución $G(t,x)$ hay gente que la llama función de Green del problema (aunque sea una distribución).

11.3 Ecuación del campo electrostático y estados estacionarios

11.3.1 Ejemplo: Problema del potencial electrostático: Ecuación de Laplace.

Dada una distribución de cargas $\rho(x,y,z)$ encontrar el potencial electrostático $u(x,y,z)$ que satisfaga la condición de borde $u(x,y,z)|_S = \phi(x,y,z)$ sobre una superficie S (finita o no).

A partir de las ecuaciones de Maxwell obtenemos que para una densidad de carga ρ

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon} \\ u(x,y,z)\big]_S = \varphi(x,y,z) \end{cases}$$

Si el problema tiene una simetría que no depende de z, es decir $u = u(x,y)$ y S pasa a ser una curva γ, queda:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\rho(x,y)}{\varepsilon} \\ u(x,y,z)\big]_\gamma = \varphi(x,y) \end{cases}$$

En ausencia de cargas, $\rho = 0$, se reduce al caso homogéneo.

En la notación general

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

se tiene: $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, por lo tanto $\Delta = b^2 - a\,c = -1 < 0$, es de tipo elíptico.

11.3.2 EDP de tipo elíptico

Las ecuaciones de tipo elíptico como la ecuación del potencial electrostático en dos dimensiones, se escribió como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad \text{para el interior de la curva } \tilde{\gamma}$$

La condición de borde puede ser:

$u(x,y)|_\gamma = \phi(x,y)$, de Dirichlet,

$\nabla u_h(x,y)|_\gamma\ \boldsymbol{n} = \psi(x,y)$, de Neumann,

Se puede descomponer como:

$u(x,y) = u_h(x,y) + u_{pi}(x,y)$

Donde es la solución de la ecuación homogénea:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}=0$$ para el interior de la curva γ $u_h(x,y) \neq 0$

Tiene condición de borde:

$u_h(x,y)\big|_\gamma = \phi(s)$, de Dirichlet, o

$\nabla u_h(x,y)\big|_\gamma\ \boldsymbol{n} = \psi(s)$, de Neumann,

donde s es una parametrización de la curva γ.

Mientras que la in homogénea es:

$$\frac{\partial^2 u_{pi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{pi}}{\partial y^2}=f(x,y)$$

Tendrá condiciones de borde:

$u_h(x,y)\big|_\gamma = 0$, de Dirichlet, o

$\nabla u_h(x,y)\big|_\gamma\ \boldsymbol{n} = 0$, de Neumann.

a) Caso homogéneo:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}=0$$ para el interior de la curva γ $u_h(x,y) \neq 0$

La condición de borde puede ser:

$u_h(x,y)\big|_\gamma = \phi(x,y)$, de Dirichlet,

$\nabla u_h(x,y)\big|_\gamma\ \boldsymbol{n} = \psi(x,y)$, de Neumann,

11.3.3 Ejemplo 1: Suponemos que se quiere conocer el potencial electrostático en un rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, con las condiciones de borde de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_h(x,0)=\varphi_1(x) \\ u_h(x,b)=\varphi_2(x) \\ u_h(0,y)=\psi_1(y) \\ u_h(a,y)=\psi_2(y) \end{cases}$$

La solución general $u_h(x,y)$ se puede escribir como suma:

$$u_h(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$$

donde cada $u_i(x,y) \neq 0$ $(1 \leq i \leq 4)$ satisfacen $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}=0$, $u_i(x,y) \neq 0$, dentro del rectángulo,

con condiciones de borde:

$$\begin{cases} u_1(x,0)=\varphi_1(x) \\ u_1(x,b)=0 \\ u_1(0,y)=0 \\ u_1(a,y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2(x,0)=0 \\ u_2(x,b)=\varphi_2(x) \\ u_2(0,y)=0 \\ u_2(a,y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_3(x,0)=0 \\ u_3(x,b)=0 \\ u_3(0,y)=\psi_1(y) \\ u_3(a,y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_4(x,0)=0 \\ u_4(x,b)=0 \\ u_4(0,y)=0 \\ u_4(a,y)=\psi_2(y) \end{cases}$$

Cada una se resuelve en forma análoga. Por lo tanto solo obtendremos $u_1(x,y)$:

Utilizando el método de separación de variables: $u_1(x,t) = X(x)\ Y(y)$

Las condiciones de borde quedan:

$$\begin{cases} u_1(0,y) = X(t)\,Y(y) = 0, & \text{pero } u_1(x,y) \neq 0 \quad \text{por lo tanto } X(0) = 0 \\ u_1(a,y) = X(a)\,Y(y) = 0, & \text{pero } u_1(x,y) \neq 0 \quad \text{por lo tanto } X(a) = 0 \end{cases}$$

Dividiendo la EDP $Y\, d^2T/dx^2 + X\, d^2Y/dy^2 = 0$ por $u_1(x,y) = X(x)\, Y(y) \neq 0$ resulta

$X^{-1}\, d^2X/dx^2 = -\, Y^{-1}\, d^2Y/dy^2 = cte = -\lambda$, pues x e y son variables independientes.

Se separa en dos EDO

a) $d^2X/dx^2 = -\lambda X$ con las condiciones $\begin{cases} X(0) = 0. \\ X(a) = 0. \end{cases}$

$0 < x < L$ de borde

Es un problema de Sturm – Liouville que ya resolvimos:

$\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/a)^2$, $X_n(x) = sen\,(n\pi/a)\,x = sen\, k_n\, x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $d^2Y_n/dy^2 = k_n^2\, Y_n$, cuya solución es $Y_n(t) = a_n\, exp(\,k_n\, y) + b_n\, exp(-k_n\, y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

la condición $u_n(x,b) = X_n(x)\, Y_n(0) = X_n(x)\, [a_n\, exp(\,k_n\, b) + b_n\, exp(-k_n\, b)] = 0$ permite determinar que $b_n = -\, a_n\, exp(\,k_n\, 2b)$ entonces:

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, [\, exp(\,k_n\, y) - exp\,(k_n\,(2b - y))\,]\, sen\, k_n\, x$$

y la condición

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, [\, 1 - exp\,(2k_n b)\,]\, sen\, k_n\, x\,,$$

permite determinar $a_n\, [\, 1 - exp\,(2k_n b)\,] = 2/a \int_0^a \varphi_1(x)\;\; sen\, [(n\pi/a)\, x]\, dx$

11.3.4 Ejemplo 2: Ahora suponemos que se quiere conocer el potencial electrostático en el interior del disco $0 \leq x^2+y^2 < r_o^2$, es decir se busca en dicha región la soluciones de

$\dfrac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} = 0$, $u_h(x,y) \neq 0$ para el interior de la curva $\gamma:\; x^2+y^2 = r_o^2$

La condición de borde puede ser:

$u_h(x,y)\big|_{\gamma} = \varphi(atan(y/x))$,

La forma de las condiciones de borde, lleva a pensar que otro tipo de coordenadas permitiría expresarla de una forma mejor, y obviamente tales coordenadas son las coordenadas polares, es decir haciendo el cambio de variables:

$$\begin{cases} r = r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \phi(x,y) = atan\,(y/x) \end{cases}$$

de manera que la EDP en las nuevas variables (r,ϕ) , $u_h(x,y)$ pasa a ser $U(r,\phi)$, y la EDP se transforma en:

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0$, con $0 < r < r_o$, $-\pi < \phi < +\pi$, $U \neq 0$

La condición de borde puede ser:

$U(r_o,\phi) = \varphi(\phi)$,

pero además debe cumplirse que:

$U(r,\phi - \pi) = U(r,\phi + \pi)$,

es decir la función U debe ser periódica, como función de ϕ, de período 2π.

Utilizando el método de separación de variables:

$$U(r,\phi) = R(r)\ \Phi(\phi)$$

La EDP queda como:

$$\Phi\,(d^2R/dr^2 + 1/r\ dR/dr) + 1/r^2\ R\ d^2\Phi/d\phi^2 = 0$$

Dividiendo por $U(r,\phi)/r^2 = R(r)\ \Phi(\phi)/r^2 \neq 0$ resulta

$R^{-1}(r^2\ d^2R/dr^2 + r\ dR/dr) = \Phi^{-1}\ d^2\Phi/d\phi^2 = cte = -\lambda$, pues r y ϕ son variables independientes.

Y una de las condiciones de borde queda:

$$U(r,-\pi) = R(r)\ \Phi(-\pi) = U(r,+\pi) = R(r)\ \Phi(+\pi)$$

es decir,

$\Phi(-\pi) = \Phi(+\pi)$, pues $U = R\ \Phi \neq 0$

De manera que se separan en dos EDO

a) $d^2\Phi/d\phi^2 = -\lambda\ \Phi \qquad -\pi < \phi < \pi$ con las condiciones de borde $\Phi(-\pi) = \Phi(+\pi)$

Es un problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde periódicas de período 2π que ya resolvimos:

$$\lambda_n = n^2, \qquad \Phi_n(\phi) = a_n \cos n\phi + b_n\ sen\ n\phi\ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) $r^2\ d^2R_n/dr^2 + r\ dR_n/dr = -n^2\ R_n$, cuya solución es $R_n(t) = c_n\ r^n + d_n\ r^{-n}$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Pero, si $n \geq 1$, se tiene que $r^{-n} \to \infty$ cuando $r \to 0$. Por lo tanto $d_n = 0$, y entonces $R_n(t) = c_n\ r^n$

De manera que la solución general es de la forma:

$$U(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\ [a_n \cos n\phi + b_n\ sen\ n\phi\ ]$$

Para determinar los valores de a_n y de b_n, debemos tomar en cuenta la otra condición:

$U(r_o,\phi) = \varphi(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_o^n\ [a_n \cos n\phi + b_n\ sen\ n\phi]$, entonces

$r_o^n a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\phi) \cos n\phi\ d\phi$, $\ r_o^n b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\phi)\ sen\ n\phi\ d\phi$, $n = 1,2,\ldots$ ¿Cuánto vale a_0?

11.3.5 Caso particular: Se desea encontrar el potencial electrostático $u_h(x,y)$ en el interior de una circunferencia de radio 1, si la mitad de superior está a un potencial 1, y la otra mitad a potencial 0. Es decir se trata de resolver el problema de valores de frontera:

$\partial^2 u_h/\partial x^2 + \partial^2 u_h/\partial y^2 = 0$ para el interior de $\gamma:\ x^2+y^2 = 1$

Las condición de borde es:

$u_h(x,y)|_{\gamma} = 1$ si $y > 0$,

$u_h(x,y)|_{\gamma} = 0$ si $y < 0$

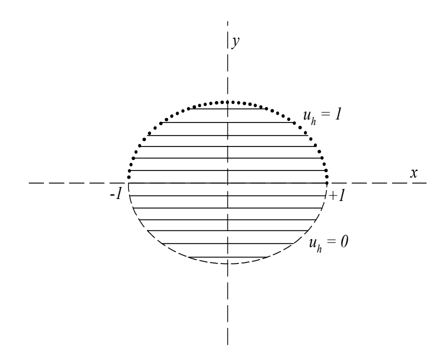


Figura 11.3 *Sector rayado mostrando el interior del disco, donde se desea calcular el potencial electrostático $u(x,y)$, cuando se conocen sus valores en el borde, $u = 1$, en la parte superior y $u = 1$, en la inferior.*

EDP en las nuevas variables (r,ϕ) , $u_h(x,y)$ pasa a ser $U(r,\phi)$, y la EDP se transforma en:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \text{ , con } 0 < r < 1,\ -\pi < \phi < +\pi,\ U \neq 0$$

Las condiciones de borde son ahora:

$U(1,\phi) = \varphi(\phi)$, donde

$\varphi(\phi) = 1$ si $0 < \phi < \pi$,

$\varphi(\phi) = 0$ si $-\pi < \phi < 0$,

además

$U(r,\phi - \pi) = U(r,\phi + \pi)$,

La solución es

$$U(r,\phi) = \tfrac{1}{2}\, a_o + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, [a_n \cos n\phi + b_n \operatorname{sen} n\phi] \text{ , donde}$$

$$a_o = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\phi)\, d\phi = 1/\pi \int_{0}^{\pi} d\phi = 1,\ a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\phi) \cos n\phi\, d\phi = 1/\pi \int_{0}^{\pi} \cos n\phi\, d\phi = 0, \text{ si } n \geq 1$$

$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\phi) \operatorname{sen} n\phi\, d\phi = 1/\pi \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} n\phi\, d\phi = (1/n\pi)\, [\cos n\phi - 1\,] = 2/[\,(2k+1)\pi\,], \text{ con } n = 2k+1$$

Entonces

$$U(r,\phi) = 1/2 + \sum_{k=0}^{\infty} (1/\pi)\, [2/\,(2k+1)\,]\, r^{2k+1} \operatorname{sen}(2k+1)\phi$$

Llamando $z = r\,(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$, es decir $Im\{\, z\,\} = r \operatorname{sen}\phi$, y entonces $Im\{z^{2k+1}\} = r^{2k+1} \operatorname{sen}(2k+1)\,\phi$, o sea

$$U(r,\phi) = 1/2 + (2/\pi)\, Im\{\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}/(2k+1)\} = 1/2 + (2/\pi)\, Im\{\int \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}\, dz\} =$$

$$1/2 + (2/\pi)\, Im\{\int \frac{dz}{1-z^2}\} = 1/2 + (2/\pi)\, Im\{\int \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right] dz\,\} =$$

$$1/2 + (1/\pi)\, Im\{\, Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\}$$

11.3.6 Observación: Este es el mismo resultado que se obtuvo usando transformaciones conformes en variable compleja.

Ver mas ejemplos en Collins (1968) y Smirnov (1975) y un enfoque mediante transformadas en Sneddon (1995) y Spiegel (1992).

b) Caso inhomogéneo:

$$\frac{\partial^2 u_{pi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{pi}}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{para el interior de la curva } \gamma$$

La condición de borde puede ser:

$u_{pi}(x,y)\big|_{\gamma} = 0,$ de Dirichlet,

$\nabla u_{pi}(x,y)\big|_{\gamma}\ \mathbf{n} = 0,$ de Neumann,

se propone como solución particular de la EDP inhomogénea la expresión:

$$u_{pi}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x\text{-}x',y-y')\, f(x',y')\, dx'dy'$$

¿Quién es entonces la distribución $G(x,y)$? ¿Qué ecuación diferencial satisface? Por un lado sabemos que:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u_{pi}(x,y) = f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x\text{-}x')\, \delta(y-y')\, f(x',y')\, dx'dy'$$

Pero por otra parte se tendrá que cumplir que:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u_{pi}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] G(x-x',y-y')\, f(x',y')\, dx'dy'$$

De manera que $G(x,y)$ satisface la ecuación diferencial (en el sentido de distribuciones):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x)\, \delta(y)$$

Expresada en coordenadas polares queda $G(x,y) = G(r,\phi)$, además dado que G no puede depender de ϕ, resulta $G(x,y) = R(r)$, y la expresión anterior se transforma en:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = d^2R/d\,r^2 + (1/r)\, dR/d\,r = \delta(x)\, \delta(y)$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{r} [d^2R/d\,r^2 + (1/r)\, dR/d\,r]\, r\, dr\, d\phi = 2\pi \int_{0}^{r} d(rdR/dr) = 2\pi\, r\, dR/dr = 1$$

O sea $dR/dr = 1/(2\pi r)$, para cualquier $r > 0$, por lo tanto resulta $R(r) = (1/2\pi)\, ln\ r$. Es decir que finalmente queda:

$$G(x,y) = (1/4\pi)\, ln\, (x^2 + y^2)$$

La distribución $G(x,y)$ hay gente que la llama función de Green del problema (aunque sea una distribución).

Para una discusión mas general ver Gudunov (1978) y Tijonov (1980).

Referencias

Collins, R.E. (1968). *Mathematical methods for physicists and engineers*. New York. E.U.A. Reinhold Book Corporation.

Godunov, S.K. (1978). *Ecuaciones de la física matemática*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Kreyszig, E. (1991). *Matemáticas avanzadas para ingenieros*. Volumen II. México. DF. México. Editorial Limusa.

Smirnov, M.M. (1975). *Problemas de ecuaciones de la física* matemática. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Sneddon, I.N. (1995). *Fourier transforms*. New York. E.U.A. Dover Publications, Inc.

Spiegel, M.R. (1992). *Transformadas de Laplace*. México D.F. México. McGraw-Hill/Inter americana de México, S.A.

Tijonov, A.N. y Samarsky, A.A. (1980). *Ecuaciones de la Física Matemática*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

CAPÍTULO 12

EDP en más de dos variables

José Luis Vicente

Nada. nada queda de tu casa natal…
Sólo telarañas que teje el yuyal.
El rosal tampoco existe
y es seguro que ha muerto al irte tú...
¡Todo es una cruz!
Nada, nada más que tristeza y quietud.
Nadie que me diga si vives aún…
J.Dames, H.Sanguinetti; NADA.

12.1 Las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético

Definimos las coordenadas cartesianas de un punto como $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ y recordamos que para un campo vectorial con derivadas hasta segundo orden, dado por $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (A_1(\boldsymbol{r}), A_2(\boldsymbol{r}), A_3(\boldsymbol{r}))$, se define $\nabla^2\boldsymbol{A} = (\nabla^2 A_1, \nabla^2 A_2, \nabla^2 A_3)$, y se cumple $\nabla^2\boldsymbol{A} = \nabla(\,div\,\boldsymbol{A}\,) - rot(rot\,\boldsymbol{A})$. A partir de las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ y el campo magnético $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$, generados por una distribución de cargas $\rho(\boldsymbol{r},t)$ y una distribución de corrientes $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ se tiene (en el sistema MKS):

$$\begin{cases} div\,\boldsymbol{E} = 0 & \text{Ley de Gauss} \\ rot\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \text{Ley de Induccion de Faraday} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\,\boldsymbol{B} = 0 & \text{Ley de Gauss} \\ rot\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \text{Ley de Ampere - Maxwell} \end{cases}$$

Lejos de las fuentes se reducen a:

$$\begin{cases} div\,\boldsymbol{E} = 0 \\ rot\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} div\,\boldsymbol{B} = 0 \\ rot\,\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \nabla(\,div\,\boldsymbol{E}\,) - rot(rot\,\boldsymbol{E}) = rot\,(\partial\boldsymbol{B}/\partial t\,) = (\partial/\partial t\,)\,rot\,\boldsymbol{B} = \mu_o\varepsilon_o\,\partial^2\boldsymbol{E}/\partial t^2$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = \nabla(\,div\,\boldsymbol{B}\,) - rot(rot\,\boldsymbol{B}) = -\mu_o\varepsilon_o\,rot\,(\partial\boldsymbol{E}/\partial t\,) = -\mu_o\varepsilon_o\,(\partial/\partial t\,)\,rot\,\boldsymbol{E} = \mu_o\varepsilon_o\,\partial^2\boldsymbol{B}/\partial t^2$$

Pero $\mu_o\varepsilon_o = 1/c^2$, donde c es la velocidad de la luz, es decir que cada componente $u(\boldsymbol{r},t)$ del campo eléctrico, y cada componente del campo magnético satisfacen la ecuación:

$$\partial^2 u/\partial t^2 - c^2\,\nabla^2 u = 0$$

que es la ecuación de las ondas (homogénea). Es decir el campo electromagnético se propaga en el espacio como una onda que viaja a la velocidad de la luz, J.C. Maxwell.
Ver por ejemplo Santaló (1970).

12.1.1 Generalización de las ecuaciones de tipo hiperbólico a tres dimensiones

Consideramos en primer lugar el problema de valores de frontera para la ecuación homogénea dada por:

$$\nabla^2 u_h - v^2 \partial^2 u_h / \partial^2 t = 0 \quad \text{con} \quad u_h = u_h(x,y,z,t) = u_h(\boldsymbol{r},t) \neq 0, \text{ para } \boldsymbol{r} \in \Omega \subset R^3 \text{ y } t > 0$$

condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_h(\boldsymbol{r},0) = \phi(\boldsymbol{r}) & \text{para } \boldsymbol{r} \in \Omega \quad \text{posicion inicial} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial t}(\boldsymbol{r},0) = \psi(\boldsymbol{r}) & \text{para } \boldsymbol{r} \in \Omega \quad \text{velocidad inicial} \end{cases}$$

Separando variables $u_h(\boldsymbol{r},t) = S(\boldsymbol{r})T(t)$ y remplazando en la ecuación diferencial y dividiendo por $v^2 u_h(r,t)$ queda:

$S^{-1} \nabla^2 S = (v^2 T)^{-1} d^2T/dt^2 = -\lambda$ por ser $\boldsymbol{r}$ y t variables independientes, se separa en dos ED:

$$\begin{cases} \nabla^2 S = -\lambda S \\ \dfrac{d^2T}{dt^2} = -\lambda v^2 T \end{cases}$$

a) Ω es un paralelepípedo, es decir $\Omega = \{(x,y,z) / 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$

Condición de frontera

$$\begin{cases} u_h(0,y,z,t) = u_h(a,y,z,t) = 0 \\ u_h(x,0,z,t) = u_h(x,b,z,t) = 0 \\ u_h(x,y,0,t) = u_h(x,y,c,t) = 0 \end{cases} \quad \text{como } u_h(\boldsymbol{r},t) = S(\boldsymbol{r})T(t) \neq 0 \text{ debe ser } T(t) \neq 0 \text{ entonces} \quad \begin{cases} S(0,y,z) = S(a,y,z) = 0 \\ S(x,0,z) = S(x,b,z) = 0 \\ S(x,y,0) = S(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

La primer ecuación diferencial $\nabla^2 S = -\lambda S$, se vuelve a separar variables $S(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ y dividiendo por $S(x,y,z) \neq 0$ se puede escribir como:

$$X^{-1} d^2X/dx^2 + Y^{-1} d^2Y/dy^2 + Z^{-1} d^2Z/dz^2 = -\lambda = -(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) \text{ y quedan tres EDO:}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} = -\lambda_x X \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} = -\lambda_y Y \\ \dfrac{d^2Z}{dz^2} = -\lambda_z Z \end{cases} \quad \text{Condicion de frontera} \quad \begin{cases} X(0)Y(y)Z(z) = X(a)Y(y)Z(z) = 0 \\ X(x)Y(0)Z(z) = X(x)Y(b)Z(z) = 0 \\ X(x)Y(y)Z(0) = X(x)Y(y)Z(c) = 0 \end{cases} \quad \text{pasa a ser} \quad \begin{cases} X(0) = X(a) = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \\ Z(0) = Z(c) = 0 \end{cases}$$

con soluciones:

$$\begin{cases} \lambda_x = k_l^2 = (l\pi/a)^2,\ l = 1,2,3,...,\ X_l(x) = sen((l\pi/a)x) \\ \lambda_y = k_m^2 = (m\pi/b)^2,\ m = 1,2,3,...,\ Y_m(y) = sen((m\pi/b)y) \\ \lambda_z = k_n^2 = (n\pi/c)^2,\ n = 1,2,3,...,\ Z_n(z) = sen((n\pi/c)z) \end{cases}$$

queda entonces $S_{lmn}(x,y,z) = X_l(x)\, Y_m(y)\, Z_n(z) = sen((l\pi/a)x)\, sen((m\pi/b)y)\, sen((n\pi/c)z)$

Llamando $k_{lmn}^2 = k_l^2 + k_m^2 + k_n^2$ y $\omega_{lmn} = k_{lmn} v$ la otra ecuación diferencial queda:

$d^2T_{lmn}/dt^2 = -\omega_{lmn}^2 T_{lmn}$ cuya solución es $T_{lmn}(t) = a_{lmn} \cos \omega_{lmn} t + b_{lmn}\, sen\, \omega_{lmn} t$ entonces

$$u_h(\boldsymbol{r},t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\, a_{lmn} \cos \omega_{lmn} t + b_{lmn}\, sen\, \omega_{lmn} t\,]\, X_l(x) Y_m(y) Z_n(z)$$

$$\partial u_h(\boldsymbol{r},t)/\partial t = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{lmn} [\, b_{lmn} \cos \omega_{lmn} t - a_{lmn}\, sen\, \omega_{lmn} t\,]\, X_l(x) Y_m(y) Z_n(z)$$

y condiciones iniciales

$$u_h(\mathbf{r},0) = \varphi(r) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn} \, X_l(x)Y_m(y)Z_n(z)$$

determina $a_{lmn} = 8/abc \int_0^a \int_0^b \int_0^c \varphi(r) \, X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) \, dx \, dy \, dz$

$$\partial u_h \,(\mathbf{r},0)/\partial t = \psi(r) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{lmn} \, b_{lmn} \, X_l(x)Y_m(y)Z_n(z)$$

determina $\omega_{lmn} \, b_{lmn} = 8/abc \int_0^a \int_0^b \int_0^c \psi(r) \, X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) \, dx \, dy \, dz$

12.2 Ecuaciones de tipo parabólico en tres dimensiones

Consideramos en primer lugar el problema de valores de frontera para la ecuación homogénea dada por:

$$\partial u_h /\partial t - D\,\nabla^2 u_h = 0 \quad \text{con} \quad u_h = u_h\,(x,y,z,t) = u_h\,(\mathbf{r},t) \neq 0, \text{ para } \mathbf{r} \in \Omega \subset R^3 \text{ y } t > 0$$

condición inicial $u_h\,(\mathbf{r},0) = \varphi(r)$ para $\mathbf{r} \in \Omega$ posición inicial

Separando variables $u_h\,(\mathbf{r},t) = S(\mathbf{r})T(t)$ y remplazando en la ecuación diferencial y dividiendo por $D\,u_h\,(r,t)$ queda:

$S^{-1}\,\nabla^2 S = (D\,T)^{-1} dT/dt = -\lambda$ por ser $\mathbf{r}$ y t variables independientes, se separa en dos ED:

$$\begin{cases} \nabla^2 S = -\lambda\, S \\ \dfrac{d^2 T}{d\,t^2} = -\lambda\, D\,T \end{cases}$$

a) Ω es un paralelepípedo, es decir $\Omega = \{(x,y,z) \,/\, 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$

Condición de frontera $\begin{cases} u_h(0,y,z,t) = u_h(a,y,z,t) = 0 \\ u_h(x,0,z,t) = u_h(x,b,z,t) = 0 \\ u_h(x,y,0,t) = u_h(x,y,c,t) = 0 \end{cases}$ pero $u_h(\mathbf{r},t) = S(\mathbf{r})T(t) \neq 0$ debe ser $T(t) \neq 0$ entonces $\begin{cases} S(0,y,z) = S(a,y,z) = 0 \\ S(x,0,z) = S(x,b,z) = 0 \\ S(x,y,0) = S(x,y,c) = 0 \end{cases}$

Procediendo como para el caso de las ecuaciones hiperbólicas, se llega a:

$k_l = l\pi/a$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, $k_m = m\pi/b$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, $k_n = n\pi/c$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$S_{lmn}(x,y,z) = X_l(x)\,Y_m(y)\,Z_n(z) = sen((l\pi/a)x)\,sen((m\pi/b)y)\,sen((n\pi/c)z)$$

Llamando $k_{lmn} = \sqrt{(k_l^2 + k_m^2 + k_n^2)}$ la otra ecuación diferencial queda:

$dT_{lmn}/dt = -D\,k_{lmn}\,T_{lmn}$ cuya solución es $T_{lmn}(t) = a_{lmn}\,exp(-k_{lmn} D\,t)$ entonces

$$u_h\,(\mathbf{r},t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn}\,exp(-k_{lmn} D\,t)\,X_l(x)Y_m(y)Z_n(z)$$

$$u_h(\mathbf{r},0) = \varphi(r) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn}\,X_l(x)Y_m(y)Z_n(z)$$

determina $a_{lmn} = 8/abc \int_0^a \int_0^b \int_0^c \varphi(r)\, X_l(x) Y_m(y) Z_n(z)\, dx\, dy\, dz$

Ver Godunov (1978) y Tijonov (1980).

12.2.1 Generalización de las ecuaciones de tipo elíptico a tres dimensiones

Consideramos en primer lugar el problema de valores de frontera para la ecuación homogénea dada por:

$\nabla^2 u_h = 0$ con $u_h = u_h(x,y,z) = u_h(\mathbf{r}) \neq 0$, para $\mathbf{r} \in \Omega \subset R^3$

condiciones de borde $u_h(\mathbf{r})|_{\partial\Omega} = \varphi(r)$ donde $\partial\Omega$ significa el borde de Ω

a) Ω es un paralelepípedo, es decir $\Omega = \{(x,y,z) / 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$

Condición de frontera
$$\begin{cases} u_h(0,y,z) = \varphi_1(y,z), & u_h(a,y,z) = \varphi_2(y,z) \\ u_h(x,0,z) = \psi_1(x,z), & u_h(x,b,z) = \psi_2(x,z) \\ u_h(x,y,0) = \chi_1(x,y), & u_h(x,y,c) = \chi_2(x,y) \end{cases}$$

Se descompone la función u_h como:

$$u_h(x,y,z) = \sum_{i=1}^{6} u_i(x,y,z)$$

donde $\nabla^2 u_i = 0$ con $u_i = u_i(x,y,z) = u_i(\mathbf{r}) \neq 0$,para $\mathbf{r} \in \Omega \subset R^3$,con $1 \le i \le 6$, y condiciones de frontera

$$\begin{cases} u_1(0,y,z) = \varphi_1(y,z), & u_1(a,y,z) = 0 \\ u_1(x,0,z) = 0, & u_1(x,b,z) = 0 \\ u_1(x,y,0) = 0, & u_1(x,y,c) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(0,y,z) = 0, & u_2(a,y,z) = \varphi_2(y,z) \\ u_2(x,0,z) = 0, & u_2(x,b,z) = 0 \\ u_2(x,y,0) = 0, & u_2(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3(0,y,z) = 0, & u_3(a,y,z) = 0 \\ u_3(x,0,z) = \psi_1(x,z), & u_3(x,b,z) = 0 \\ u_3(x,y,0) = 0, & u_3(x,y,c) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_4(0,y,z) = 0, & u_4(a,y,z) = 0 \\ u_4(x,0,z) = 0, & u_4(x,b,z) = \psi_2(x,z) \\ u_4(x,y,0) = 0, & u_4(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_5(0,y,z) = 0, & u_5(a,y,z) = 0 \\ u_5(x,0,z) = 0, & u_5(x,b,z) = 0 \\ u_5(x,y,0) = \chi_1(x,y), & u_5(x,y,c) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_6(0,y,z) = 0, & u_6(a,y,z) = 0 \\ u_6(x,0,z) = 0, & u_6(x,b,z) = 0 \\ u_6(x,y,0) = 0, & u_6(x,y,c) = \chi_2(x,y) \end{cases}$$

Calcularemos solo u_1 porque el resto se hace en forma análoga.

Separando variables $u_1(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$, remplazando en la ED y dividiendo por u_1 queda:

$Y^{-1}\, d^2Y/dy^2 + Z^{-1}\, d^2Z/dz^2 = -X^{-1}\, d^2X/dx^2 = -(\mu + \nu)$ por ser (y,z) y x variables independientes,

llamando $\beta_{\mu\nu}^2 = \mu + \nu$, se separa en tres EDO:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dy^2} = -\mu X \quad u_1(x,0,z) = X(x)Y(0)Z(z) = 0,\ u_1(x,b,z) = X(x)Y(b)Z(z) = 0, \quad \text{es } Y(0) = Y(b) = 0 \\ \dfrac{d^2Z}{dz^2} = -\nu Y \quad u_1(x,y,0) = X(x)Y(y)Z(0) = 0,\ u_1(x,y,c) = X(x)Y(y)Z(c) = 0, \quad \text{es } Z(0) = Z(c) = 0 \\ \dfrac{d^2X}{dx^2} = \beta_{\mu\nu}^{2}\, X \end{cases}$$

Las dos primeras son problemas de Sturm-Liouville con condiciones de borde regulares cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} \mu = k_m^2 = (m\pi/b)^2, \quad m = 1, 2, 3, ..., Y_m(y) = sen((m\pi/b)y) \\ \nu = k_n^2 = (n\pi/c)^2, \quad n = 1, 2, 3, ..., Z_n(y) = sen((n\pi/c)z) \end{cases}$$

queda pues

$$u_1(x,y,z) = X_{mn}(x)\, Y_m(y)\, Z_n(z) \quad \text{junto a} \quad d^2X_{mn}/dx^2 = \beta_{mn}^2 X_{mn}$$

determina

$$X_{mn}(x) = a_{mn}\, exp(\beta_{mn} x) + b_{mn}\, exp(-\beta_{mn} x)$$

pero

$$X_{mn}(a) = 0 = a_{mn}\, exp(\beta_{mn} a) + b_{mn}\, exp(-\beta_{mn} a) \quad \text{o sea} \quad b_{mn} = -a_{mn}\, exp(2\beta_{mn} a)$$

entonces

$$u_1(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn} \; [\, exp(\beta_{mn} x) - exp(\beta_{mn}(2a - x))\,]\; Y_m(y) Z_n(z) \quad \text{con la otra condición}$$

$$u_1(0,y,z) = \varphi_1(y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn} \; [\, 1 - exp(2a\, \beta_{mn})\,]\; Y_m(y) Z_n(z)$$

resulta $\quad a_{lmn}\; [\, 1 - exp(2a\, \beta_{mn})\,] = 4/bc \int_0^b \int_0^c \varphi_1(y,z)\, Y_m(y) Z_n(z)\, dy\, dz$

b) Ω es la región entre dos esferas concéntricas, es decir $\Omega = \{(x,y,z) / r_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < r_2^2\}$

condiciones de borde $\begin{cases} u_h(x,y,z)\big]_{r=r_1} = \varphi(\theta,\phi) \\ u_h(x,y,z)\big]_{r=r_2} = \psi(\theta,\phi) \end{cases}$

En coordenadas esféricas

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = acos(z/r) \\ \phi = atan(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\, sen\,\theta\, cos\,\phi \\ y = r\, sen\,\theta\, sen\,\phi \\ z = r\, cos\,\theta \end{cases}$$

entonces $u_h(x,y,z) = U(r,\theta,\phi)$

La ecuación diferencial queda:

$$\nabla^2 U = 1/r^2 \partial/\partial r(r^2 \partial U/\partial r) - 1/r^2\, [(1/sen\theta)\, \partial/\partial\theta\, (sen\theta\, \partial U/\partial\theta) + 1/sen^2\theta\;\; \partial^2 U/\partial^2\phi\,] = 0$$

Las condiciones de borde ahora son:

$$\begin{cases} U(r_1, \theta, \phi) = \varphi(\theta,\phi) \\ U(r_2, \theta, \phi) = \psi(\theta,\phi) \\ U(r, \theta, -\pi) = U(r, \theta, \pi) \end{cases}$$

Proponiendo la separación de variables $U(r,\theta,\phi) = R(r)\, Y(\theta,\phi)$, y dividiendo por $U(r,\theta,\phi)/r^2$,resulta:

$$-1/R\, (d/dr)(r^2 dR/dr) = 1/Y\, [(1/sen\theta)\partial/\partial\theta\, (sen\theta\;\; \partial Y/\partial\theta) + 1/sen^2\theta\; \partial^2 Y/\partial^2\phi\,] = \lambda$$

Es decir que a su vez se separa en dos ecuaciones diferenciales, una de las cuales es el problema de frontera:

$$[(1/sen\theta)\partial/\partial\theta\, (sen\theta\;\; \partial Y/\partial\theta) + 1/sen^2\theta\; \partial^2 Y/\partial^2\phi\,] = \lambda\, Y(\theta,\phi)$$

Empleando el método de separación de variables: $Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\, \Phi(\phi) \neq 0$, y dividiendo por $Y(\theta,\phi)/sen^2\theta$ queda:

$\Phi^{-1}\, d^2\Phi/d^2\phi = -\,\Theta^{-1}[\, sen\theta\, (d/d\theta)(sen\theta\, d\Theta/d\theta) + \lambda\;\, sen^2\theta\;\, \Theta\,] = -\mu$, ya que ϕ y θ independientes.

Una de las condiciones de borde queda:

$$Y(\theta,-\pi) = \Theta(\theta)\ \Phi(-\pi) = Y(\theta,+\pi) = \Theta(\theta)\ \Phi(+\pi)$$

es decir

$\Phi(-\pi) = \Phi(+\pi)$, pues $Y = \Theta\ \Phi \neq 0$

Ahora se separan en dos EDO

I) $d^2\Phi/d\phi^2 = -\mu\ \Phi \qquad -\pi < \phi < \pi$ con las condiciones de borde $\Phi(-\pi) = \Phi(+\pi)$

Problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde periódicas de período 2π, ya resuelto:

$$\lambda_n = m^2, \qquad \Phi_m(\phi) = a_m \cos m\phi + b_m \operatorname{sen} m\phi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

también se pueden escribir como $\Phi_m(\phi) = c_m \exp(im\phi)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ donde $c_{-m} = c_m{}^*$.

Con condiciones de ortogonalidad

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_m(\phi)\ \Phi^*_{m'}(\phi)\ d\phi = 2\pi\delta_{mm'}$$ con $\delta_{mm'} = 0$ si $m \neq m'$ y $\delta_{mm} = 1$.

II) $1/\operatorname{sen}\theta\ (d/d\theta)(\operatorname{sen}\theta\ d\Theta_m/d\theta) + [\lambda - m^2/\operatorname{sen}^2\theta]\ \Theta_m = 0$,

Con el cambio de variables $x = \cos\theta$, llamando $y_m(x) = \Theta_m(\theta)$, se tiene que

$1/\operatorname{sen}\theta\ (d/d\theta) = -1/dx$, y como $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$, finalmente se puede reescribir como:

$$d/dx\,[(1 - x^2)\ dy_m/dx] + [\lambda - m/(1 - x^2)]\ y_m(x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

Si se toma el caso particular de $m = 0$, se tiene un problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde singulares que ya resuelto, y la solución queda:

$\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ autovalores, $y_l(x) = P_l(x)$ autofuciones polinomios de Legendre.

Con condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\ P_{l'}(\cos\theta)\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta = \int_{-1}^{+1} P_l(x)\ P_{l'}(x)\ dx = 2/(2l+1)\ \delta_{ll'}$$

Si $m \neq 0$, las soluciones son las funciones asociadas de Legendre, definidas como:

$P_{lm}(x) = (1 - x^2)^{|m/2|}\ d^{|m|}P_l(x)/d^{|m|}x$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$.

Con condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} P_{lm}(\cos\theta)\ P_{l'm'}(\cos\theta)\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta = \int_{-1}^{+1} P_{lm}(x)\ P_{l'm'}(x)\ dx = (2/(2l+1))\ ((l+m)!/(l-m!))\ \delta_{ll'}\ \delta_{mm'}$$

Finalmente:

$\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ autovalores

$Y_{lm}(\theta,\phi) = P_{lm}(\cos\theta)\exp(im\phi)$, para $l = 0, 1, \ldots$; $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$. autofunciones,

denominados armónicos esféricos.

Con condiciones de ortogonalidad

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} Y_{lm}(\theta,\phi)\ Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\ d\Omega = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} P_{lm}(\cos\theta)\ P_{l'm'}(\cos\theta)\ \Phi_m(\phi)\ \Phi^*_{m'}(\phi)\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta\ d\phi =$$

$$= (4\pi/(2l+1))\ ((l+m)!/(l-m!))\ \delta_{ll'}\ \delta_{mm'}$$

$d\Omega = \operatorname{sen}\theta\ d\theta\ d\phi$ se llama diferencial de ángulo sólido.

Queda entonces por resolver la parte radial

$$(d/dr)(r^2 dR/dr) = r^2 d^2R/dr^2 + 2r\ dR/dr = l(l+1)\ R(r)$$

es decir

$$d^2R/dr^2 + 2/r\, dR/dr - l(l+1)/r^2\, R(r) = 0$$

siendo $r_0 = 0$ un punto singular regular, por lo tanto:

$$R(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, r^{\lambda+k}, \qquad dR/dr = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, (\lambda+k)\, r^{\lambda+k-1}, \qquad d^2R/dr^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, (\lambda+k-1)\, r^{\lambda+k-2}$$

Con $a_0 \neq 0$. Reemplazado en la ecuación diferencial queda

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, [(\lambda+k)\,(\lambda+k+1) - l(l+1)]\, r^{\lambda+k} = 0$$

Resulta entonces $(\lambda - l)\,(\lambda+l+1) = 0$, y $c_k = 0$ si $k > 0$, es decir que $R_l(r) = a_l\, r^l + b_l\, r^{-l-1}$ y queda

$$U(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l\, r^l + b_l\, r^{-l-1}) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

con las restantes condiciones de borde

$$U(r_1,\theta,\phi) = \varphi(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l\, r_1^l + b_l\, r_1^{-l-1}) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$U(r_2,\theta,\phi) = \psi(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l\, r_2^l + b_l\, r_2^{-l-1}) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones

$$a_l\, r_1^l + b_l\, r_1^{-l-1} = (2l+1)/[4\pi\,(2^{l+1}-1)] \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi(\theta,\phi)\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)\, d\Omega$$

$$a_l\, r_2^l + b_l\, r_2^{-l-1} = (2l+1)/[4\pi\,(2^{l+1}-1)] \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} \psi(\theta,\phi)\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)\, d\Omega$$

se obtienen los valores de a_l y b_l

12.2.2 Nota 1: Hemos utilizado la relación

$$\sum_{m=-l}^{+l} (l+m)!/(l-m!) = 2^{l+1}-1$$

12.2.3 Nota 2: Si la región fuera el interior de una esfera, $x^2 + y^2 + z^2 < r_2^2$, la solución admisible para la parte radial sería $R_l(r) = a_l\, r^l$, es decir $b_l = 0$ y solo existe una condición de borde, que determina los valores de a_l. Y si la región es el exterior de una esfera, $x^2 + y^2 + z^2 > r_1^2$, la solución admisible sería $R_l(r) = b_l\, r^{-l-1}$, pues $a_l = 0$ y solo existe una condición de borde, que determina los valores de b_l.

Ver Alonso (1995), Courant (1953) y Epstein (1962).

12.3 Notas sobre mecánica cuántica

12.3.1 El formalismo de Schrödinger

Este formalismo permite ir de la formulación clásica de la mecánica a la formulación cuántica. Dado un sistema de n partículas, caracterizadas por sus coordenadas $(x_1,y_1,z_1, \ldots, x_n,y_n,z_n)$ y sus impulsos lineales $(p_{x1},p_{y1},p_{z1}, \ldots, p_{xn},p_{yn},p_{zn})$, a cada magnitud física

$$F = F(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, \ldots, p_{xn}, p_{yn}, p_{zn}),$$

se le asocia un operador mecano cuántico

$$\mathcal{F} = F(t, x_1,y_1,z_1,\ldots, x_n,y_n,z_n,(\hbar/i)\partial/\partial x_1,(\hbar/i)\partial/\partial y_1,(\hbar/i)\partial/\partial z_1, \ldots,(\hbar/i)\partial/\partial x_n,(\hbar/i)\partial/\partial y_n,(\hbar/i)\partial/\partial z_n),$$

Donde $\hbar$ es la constante de Planck dividida 2π. En particular se tendrá el operador hamiltoniano $\mathcal{H}$, a partir del cual se obtiene la **ecuación de Schrödinger**:

$$i\,\hbar\,\partial\Psi/\partial t = \mathcal{H}[\Psi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)], \quad \Psi \neq 0$$

Donde $\Psi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ es la función de onda del sistema, o sea:

1) $|\Psi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)|^2$ da la probabilidad de encontrar el sistema, en el instante t, en las coordenadas $(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$.

2) El valor medio de toda magnitud física clásica F esta dado por $<F> = <\Psi, \mathcal{F}[\Psi]>/<\Psi,\Psi>$

Ver Merzbacher (1961).

12.3.2 La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

El problema de resolver la ecuación de Schrödinger, se puede transformar en un problema de valores de frontera. Es decir, si el hamiltoniano no depende explícitamente de t, puede proponerse separación de variables:

$$\Psi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = \psi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)\,T(t), \text{ con } \psi \neq 0,\ T \neq 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, y dividiendo por Ψ, queda

$$i\,\hbar\,\partial\Psi/\partial t = \mathcal{H}[\Psi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)], \quad \Psi \neq 0$$

$$(i\,\hbar/T)dT/dt = \mathcal{H}[\psi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)] = E, \text{ por ser variables independientes,}$$

de manera que se separa en:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -(i\,E/\hbar)\,T \\ \mathcal{H}\left[\psi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)\right] = E\psi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

La solución de la primera es: $T(t) = exp[-(iE/\hbar)(t-t_o)]$

Y la otra ecuación: $\mathcal{H}[\psi] = E\,\psi$

se denomina ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y es un problema de valores de frontera, cuya solución estará determinada por los valores admisibles de E y ψ. Cuando el sistema está confinado existirá un conjunto discreto de valores E_n, o autovalores, y de funciones ψ_n, o autofunciones.

En estos casos la solución general del problema se podrá expresar como:

$$\Psi(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \exp[-(iE_n/\hbar)(t-t_o)],$$

12.4 El caso de una partícula libre

12.4.1 El Hamiltoniano

Si se considera una partícula de masa m_o, cuyo impulso lineal es $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$, sobre la que no actúa ningún campo externo, entonces su hamiltoniano clásico H coincidirá con su energía cinética T, es decir:

$$H = T = (^1/_{2mo})\, \boldsymbol{p}^2 = (^1/_{2mo})\ (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

de manera que el operador hamiltoniano queda:

$$\mathcal{H} = (^1/_{2mo})\ \{[(\hbar/i)\partial/\partial x]^2 + [(\hbar/i)\partial/\partial y]^2 + [(\hbar/i)\partial/\partial z)]^2\} =$$

$$= -\hbar^2/_{2mo}\, [(\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2] = -\hbar^2/_{2mo}\ \nabla^2$$

Es decir que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es ahora:

$$-\hbar^2/_{2mo}\ \nabla^2[\psi] = E\,\psi$$

12.4.2 El impulso angular $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^2$

Si se considera el impulso angular de una partícula de masa m_o, cuyo impulso lineal es $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$, su impulso angular $\boldsymbol{L}$ es:

$$\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - z\,p_y,\ zp_x - xp_z,\ xp_y - yp_x) = (L_x, L_y, L_z)$$

Que permite definir, a través de sus componentes, los tres operadores $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_y$, y $\mathcal{L}_z$, en coordenadas cartesianas y esféricas, como:

$$\mathcal{L}_x = i\,\hbar\,(z\,\partial/\partial y - y\,\partial/\partial z) = i\,\hbar\,(sen\,\phi\,\partial/\partial\theta + \cos\phi\,ctg\,\theta\,\partial/\partial\phi)$$

$$\mathcal{L}_y = i\,\hbar\,(x\,\partial/\partial x - x\,\partial/\partial z) = i\,\hbar\,(\cos\phi\,\partial/\partial\theta + sen\,\phi\,ctg\,\theta\,\partial/\partial\phi)$$

$$\mathcal{L}_z = i\,\hbar\,(y\,\partial/\partial x - x\,\partial/\partial y) = -i\,\hbar\,\partial/\partial\phi$$

Análogamente se define el operador impulso angular al cuadrado, $\mathcal{L}^2$, como $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2$, en coordenadas esféricas es:

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2 = -\hbar^2\,[\,1/sen\,\theta\,(\partial/\partial\theta)(sen\,\theta\ \partial/\partial\theta) + 1/sen^2\theta\ \ \partial^2/\partial\phi^2\,]$$

¿Quiénes son los autovalores λ y las autofunciones $Y(\theta,\phi)$ de $\mathcal{L}^2$? Pues vemos que no dependen de r. Es decir en este caso debemos resolver el problema de valores iniciales dado por: $\boldsymbol{L}^2\,[Y(\theta,\phi)] = \lambda\,Y(\theta,\phi)$, para $-\pi < \phi < \pi$, $0 < \theta < \pi$. Con la condición de borde $Y(\theta,-\pi) = Y(\theta,\pi)$. Entonces

$$-\hbar^2\,[\,1/sen\,\theta\,(\partial/\partial\theta)(sen\,\theta\ \partial Y/\partial\theta) + 1/sen^2\theta\ \ \partial^2 Y/\partial\phi^2\,] = \lambda\,Y(\theta,\phi),$$

Empleando el método de separación de variables: $Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\phi) \neq 0$, y dividiendo por $Y(\theta,\phi)/sen^2\theta$ queda:

$$\Phi^{-1}\,d^2\Phi/d^2\phi = -\,\Theta^{-1}[\,sen\,\theta\,(d/d\theta)(sen\,\theta\,d\Theta/d\theta) + (\lambda/\hbar^2)\,sen^2\theta\,\Theta\,] = -\mu,$$

por ser ϕ y θ variables independientes.

Una de las condiciones de borde queda: $Y(\theta,-\pi) = \Theta(\theta)\,\Phi(-\pi) = Y(\theta,+\pi) = \Theta(\theta)\,\Phi(+\pi)$

es decir, $\Phi(-\pi) = \Phi(+\pi)$, pues $Y = \Theta\,\Phi \neq 0$

De manera que se separan en dos EDO

a) $d^2\Phi/d\phi^2 = -\mu\ \Phi \qquad -\pi < \phi < \pi$ con las condiciones de borde $\Phi(-\pi) = \Phi(+\pi)$

Es un problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde periódicas de período 2π que ya resolvimos:

$$\lambda_m = m^2, \qquad \Phi_m(\phi) = a_m \cos m\,\phi + b_m \operatorname{sen} m\,\phi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

también se pueden escribir como

$$\Phi_m(\phi) = c_m \exp(im\phi), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{donde } c_{-m} = c_m^*.$$

b) $1/\operatorname{sen}\theta\ (d/d\theta)(\operatorname{sen}\theta\ d\Theta_m/d\theta) + [\,(\lambda/\hbar^2) - m^2/\operatorname{sen}^2\theta\,]\ \Theta_m = 0,$

Con el cambio de variables $x = \cos\theta$, entonces, llamando $y_m(x) = \Theta_m(\theta)$, se tiene que $1/\operatorname{sen}\theta\ (d/d\theta) = -1/dx$, y como $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$, finalmente se puede reescribir como:

$$d/dx\,[(1-x^2)\,dy_m/dx] + [\,(\lambda/\hbar^2) - m/(1-x^2)\,]\,y_m(x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

Si se toma el caso particular de $m = 0$, se tiene un problema de Sturm – Liouville con condiciones de borde singulares que ya resolvimos, y cuya solución ahora queda:

$\lambda = l\,(l+1)\,\hbar^2$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ autovalores,

$y_l(x) = P_l(x)$ autofuciones los polinomios de Legendre.

Si $m \neq 0$, entonces las soluciones son las **funciones asociadas de Legendre**, definidas como:

$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{|m/2|}\ d^{|m|}P_l(x)/d^{|m|}x$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l.$

De manera que la solución final es:

$\lambda = l\,(l+1)\,\hbar^2$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ autovalores

$Y_{lm}(\theta,\phi) = P_{lm}(\cos\theta)\,\exp(im\phi)$, para $l = 0, 1, 2, \ldots$ y $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l.$ autofunciones.

Son los denominados armónicos esféricos. De manera que:

$\boldsymbol{L}^2\,[Y_{lm}(\theta,\phi)] = l\,(l+1)\,\hbar^2\ Y_{lm}(\theta,\phi)$, donde $l = 0, 1, 2, \ldots,$

para cada l se tiene la degeneración $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l.$

12.5 Dos partículas interactuando en función de su distancia

Consideramos el caso de dos partículas cuyas masas son m_1 y m_2, y sus coordenadas $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,y_2,z_2)$, respectivamente. Interactuando a través de un potencial U que depende de su distancia $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$, es decir $U = U(r)$.

Llamando $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ a las respectivas velocidades de las partículas, el hamiltoniano clásico queda expresado como:

$$H = H(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \tfrac{1}{2}\,m_1\,\boldsymbol{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,\boldsymbol{v}_2^2 + U(r) = {}^{1}/_{2m_1}\ \boldsymbol{p}_1^2 + {}^{1}/_{2m_2}\ \boldsymbol{p}_2^2 + U(r)$$

Donde $\boldsymbol{p}_1$ y $\boldsymbol{p}_2$ son los impulsos lineales de las partículas 1 y 2 respectivamente. Como el potencial aparece dependiendo de las coordenadas relativas, es decir de $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, no es posible descomponerlo en suma de dos hamiltonianos, uno asociado a la partícula 1, y otro asociado a la 2, es conveniente emplear otro sistema de coordenadas. Por ejemplo, las del centro de masa por un lado:

$\boldsymbol{R}_c = (m_1\,\boldsymbol{r}_1 + m_2\,\boldsymbol{r}_2)/M$, coordenada del centro de masa,

$\boldsymbol{V}_c = (m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2)/M$, velocidad del centro de masa,

$\boldsymbol{P}_c = (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)$, impulso lineal del centro de masa,

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total; y por otro lado tomamos las coordenadas relativas, es decir:

$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$, posición relativa de la partícula 2 respecto a la 1,

$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$, velocidad relativa,

Entonces a partir de las relaciones:

$$M\,\boldsymbol{V}_c = m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2,$$

$$m_1\,\boldsymbol{v} = m_1\,\boldsymbol{v}_2 - m_1\,\boldsymbol{v}_1,$$

$$m_2\,\boldsymbol{v} = m_2\,\boldsymbol{v}_2 - m_2\,\boldsymbol{v}_1,$$

Sumando la primera y segunda queda:

$M\,\boldsymbol{V}_c + m_1\,\boldsymbol{v} = M\,\boldsymbol{v}_2$, es decir $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V}_c + (m_1/M)\,\boldsymbol{v}$,

y restando la primera menos la tercera:

$M\,\boldsymbol{V}_c - m_2\,\boldsymbol{v} = M\,\boldsymbol{v}_1$, es decir $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V}_c - (m_2/M)\,\boldsymbol{v}$,

Queda:

$$H = \tfrac{1}{2}\,m_1\,[\boldsymbol{V}_c - (m_2/M)\,\boldsymbol{v}]^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2\,[\boldsymbol{V}_c + (m_1/M)\,\boldsymbol{v}]^2 + U(r) = \tfrac{1}{2}\,M\,\boldsymbol{V}_c^{\,2} + \tfrac{1}{2}\,\mu\,\boldsymbol{v}^{\,2} + U(r)$$

donde $\mu = m_1\,m_2/M$ es la masa reducida. Llamando $\boldsymbol{p} = \mu\,\boldsymbol{v}$, al impulso lineal relativo, con la masa reducida, resulta

$$H = H(\boldsymbol{R}_c, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}_c, \boldsymbol{p}) = {}^1/_{2M}\ \boldsymbol{P}_c^{\,2} + {}^1/_{2\mu}\ \boldsymbol{p}^{\,2} + U(r) = H_c + H_r$$

Siendo $H_c = H(\boldsymbol{R}_c, \boldsymbol{P}_c) = {}^1/_{2M}\ \boldsymbol{P}_c^{\,2}$, y $H_r = H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = {}^1/_{2\mu}\ \boldsymbol{p}^2 + U(r)$, de esta forma hemos podido escribir el hamiltoniano como suma de dos hamiltonianos, uno asociado al centro de masa, y otro a la posición relativa.

Ahora podemos expresar el operador hamiltoniano $\mathcal{H}$ como suma de otros dos $\mathcal{H}_c$ y $\mathcal{H}_r$, es decir:

$$\mathcal{H} = -\hbar^2/_{2M}\ \nabla_c^{\,2} - \hbar^2/_{2\mu}\ \nabla^2 + U(r) = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_r$$

Donde $\mathcal{H}_c = -\hbar^2/_{2M}\,\nabla_c^{\,2}$, y $\mathcal{H}_r = -\hbar^2/_{2\mu}\,\nabla^2 + U(r)$. El primero corresponde al operador hamiltoniano de una partícula libre cuya masa es la masa total M y su posición la del centro de masa, mientras que el segundo se puede interpretar como el hamiltoniano de una partícula de masa μ, sometido a un potencial $U(r)$.

Entonces la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, se puede escribir como:

$$\mathcal{H}\,[\chi(\boldsymbol{R}_c,\boldsymbol{r})\,] = E\,\chi(\boldsymbol{R}_c,\boldsymbol{r}),\ \chi \neq 0$$

Separando variables, es decir escribiendo $\chi(\boldsymbol{R}_c,\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{R}_c)\,\psi(\boldsymbol{r})$, resulta:

$$\mathcal{H}\,[\varphi(\boldsymbol{R}_c)\,\psi(\boldsymbol{r})] = \psi(\boldsymbol{r})\,\mathcal{H}_c\,[\varphi(\boldsymbol{R}_c)] + \varphi(\boldsymbol{R}_c)\,\mathcal{H}_r[\psi(\boldsymbol{r})] = E\,\varphi(\boldsymbol{R}_c)\,\psi(\boldsymbol{r}),$$

Dividiendo por $\chi(\boldsymbol{R}_c,\boldsymbol{r}) \neq 0$

$$1/\varphi(\boldsymbol{R}_c)\,\mathcal{H}_c\,[\varphi(\boldsymbol{R}_c)] + 1/\psi(\boldsymbol{r})\,\mathcal{H}_r[\psi(\boldsymbol{r})] = E = E_c + \varepsilon$$

De manera que se divide en dos ecuaciones diferenciales, a saber:

$$\mathcal{H}_c\,[\varphi(\boldsymbol{R}_c)] = -\hbar^2/_{2M}\ \nabla_c^{\,2}\,\varphi(\boldsymbol{R}_c) = E_c\,\varphi(\boldsymbol{R}_c)$$

$$\mathcal{H}_r[\psi(\boldsymbol{r})] = [-\hbar^2/_{2\mu}\,\nabla^2 + U(r)]\,\psi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\,\psi(\boldsymbol{r})$$

La primera corresponde al movimiento del centro de masa que, en ausencia de campos externos, se mueve como una partícula libre, y la segunda es análoga a una partícula cuya

masa es la masa reducida μ, la posición es la relativa $\boldsymbol{r}$ entre ambas partículas, y un potencial que depende de la distancia r. Para comenzar a resolver esta última vamos a escribir el operador laplaciano en coordenadas esféricas, y queda:

$$-\hbar^2/_{2\mu}\ \{1/r^2\partial/\partial r(\ r^2\partial\psi/\partial r) + 1/r^2\ [(1/sen\ \theta\ )\ \partial/\partial\theta\ (\ sen\ \theta\ \partial\psi/\partial\theta\ ) + 1/sen^2\theta\ \ \partial^2\psi/\partial\phi^2\ ]\} + U(r)\psi =$$
$$= \varepsilon\,\psi(r,\theta,\phi)$$

con $r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ -\pi < \phi < \pi$.

Proponiendo la separación de variables $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\ \ Y(\theta,\phi)$, y de dividir por $\hbar^2/_{2\mu}\ \ \psi(r,\theta,\phi)$, resulta:

$$-1/R\ (d/d\,r(\ r^2dR/dr\ ) + 2\mu\,r^2/\hbar^2\ [\varepsilon - U(r)] = 1/Y\ [(1/sen\theta\ )\partial/\partial\theta\ (sen\theta\ \ \partial Y/\partial\theta\ ) + 1/sen^2\theta\ \partial^2Y/\partial\phi^2\ ] = \lambda$$

Es decir que a su vez se separa en dos ecuaciones diferenciales, una de las cuales es el problema de frontera:

$$[(1/sen\ \theta\ )\partial/\partial\theta\ (\ sen\ \theta\ \ \partial Y/\partial\theta\ ) + 1/sen^2\theta\ \partial^2Y/\partial\phi^2\ ] = \lambda\ Y(\theta,\phi)$$

ya resuelto:

$\lambda = l\ (l+1),\ l = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .$ autovalores

$Y_{lm}(\theta,\phi) = P_{lm}(cos\ \theta)\ exp(im\phi),\ l = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .$ y $m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ .\ .\ .,\ \pm l.$ autofunciones.

queda entonces por resolver:

$$1/r^2d/d\,r(\ r^2dR/dr\ \ + 2\mu/\hbar^2\ [\ \varepsilon + U(r) -\ l(l+1)\ \hbar^2/2\mu\,r^2]\ R(r) = 0$$

12.5.1 El átomo de hidrógeno

Consideramos que las dos partículas son un protón y un electrón, que constituyen un átomo de hidrógeno, con un potencial de interacción eléctrico, es decir:

$U(r) = -\ k\ /r$

Luego de la separación de variables $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\ \ Y(\theta,\phi)$, y dividiendo por $\hbar^2/_{2\mu}\ \ \psi(r,\theta,\phi)$, la parte angular, $Y(\theta,\phi)$, de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo queda:

$Y_{lm}(\theta,\phi) = P_{lm}(cos\ \theta)\ exp(im\phi),\ l = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .$ y $m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ .\ .\ .,\ \pm l.$ los llamados armónicos esféricos.

Si para un mismo valor de l se combinan los armónicos esféricos con m y $-m$, se obtienen funciones reales, u orbitales:

l	m	$Y_{lm}(\theta,\phi)$	*orbitales*
0	0	$1/\sqrt{4\pi}$	S
1	0	$\sqrt{3/4\pi}\ cos\ \theta$	p_z
1	± 1	$\sqrt{3/8\pi}\ sen\ \theta\ e^{\pm i\,\phi}$	$p_x = ½\ (Y_{1,1}+Y_{1,-1}),\qquad p_y = {}^1/_{2i}\ (Y_{1,1} - Y_{1,-1})$
2	0	$½\ \sqrt{5/4\pi}\ (3\ cos^2\theta - 1)$	$d_{\ 3z2-r2}$
2	± 1	$\pm\ \sqrt{15/8\pi}\ \ sen\theta\ cos\theta\ e^{\pm i\,\phi}$	$d_{xz},\ d_{yz}$
2	± 2	$¼\ \ \sqrt{15/2\pi}\ \ sen^2\theta\ e^{\pm i\,2\,\phi}$	d_{x2-y2}

Tabla 12.1 *Parte angular de la función de onda del átomo de hidrogeno para l = 0, 1, 2.*

Se tiene entonces $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\ Y_{lm}(\theta,\phi) = R(r)\ P_{lm}(cos\ \theta)\ exp(im\phi)$,

Reemplazando en la parte radial de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, para dos partículas, donde m es la masa reducida del protón y el electrón, queda:

$$1/r^2d/d\,r(\ r^2dR/dr\ \ + [\ 2\mu\,\varepsilon/\hbar^2\ \ + 2\mu\,k\ /\ \hbar^2\ (1/r) -\ l(l+1)/\ r^2]\ R(r) = 0$$

Entonces

$$r^2\, d^2R/dr^2 + 2r\, dR/dr + [\, 2\mu\,\varepsilon/\hbar^2\, r^2 + (2\mu\, k/\hbar^2)\, r - l(l+1)]\, R(r) = 0$$

definiendo:

$\alpha^2 = -\,8\mu\,\varepsilon/\hbar^2$, $\beta = (k/2\,\hbar^2)\sqrt{(-2\mu/\varepsilon)}$ es decir: $2\mu\,\varepsilon/\hbar^2 = -\,\alpha^2/4,\ 2\mu\, k/\hbar = \beta\,\alpha$

queda así:

$r^2\, d^2R/dr^2 + 2r\, dR/dr + [\beta\,\alpha\, r - \tfrac{1}{4}\,\alpha^2\, r^2 - l(l+1)]\, R(r) = 0$, llamando $x = \alpha\, r = (2/\hbar)\sqrt{(-2\mu\,\varepsilon)}\, r$

conduce a:

$$d^2R/dx^2 + 2/x\, dR/dx + [\,\beta/x - \tfrac{1}{4} - l(l+1)/x^2\,]\, R(x) = 0$$

Soluciones asintóticas:

$|x| >> 1$, es $R(x) = c_1\, exp(-\tfrac{1}{2}\, x) + c_2\, exp(+\tfrac{1}{2}\, x)$, pero $|x| \to +\infty$, R debe ser finito, es decir $c_2 = 0$.

$|x| << 1$, es $R(x) = d_1\, x^l + d_2\, x^{-(l+1)}$, pero $|x| \to 0+$, R debe ser finito, es decir $d_2 = 0$.

Para todo x vale:

$R(x) = y(x)\, x^l\, exp(-\tfrac{1}{2}\, x)$ tendremos:

$$R'(x) = \{\, y(x)\, [\, l\, x^{l-1} - \tfrac{1}{2}\, x^l\,] + y'(x)\, x^l\,\}\, exp(-\tfrac{1}{2}\, x)$$

$$R''(x) = \{y(x)\, [\, l(l-1)\, x^{l-2} - l\, x^{l-1} + \tfrac{1}{4}\, x^l\,] + y'(x)\, [\, 2l\, x^{l-1} - x^l\,] + y''(x)\, x^l\,\}\, exp(-\tfrac{1}{2}\, x)$$

Entonces queda:

$$x^l\, y'' + [\,(2l+2)\, x^{l-1} - x^l\,]\, y' + (\beta - l - 1)\, x^{l-1}\, y(x) = 0$$

Recordamos que

$$x\, y'' + (1 - x)\, y' + \kappa\, y(x) = 0$$

para que no diverja más rápido que $exp(-\tfrac{1}{2}\, x)$, tiene que tener como solución:

$y(x) = L_\kappa(x) = e^x\, (d^\kappa/dx^\kappa)\, (x^\kappa\, e^{-x})$ Los polinomios de Laguerre

y además:

$$x\, y'' + (\nu + 1 - x)\, y' + (\kappa - \nu)\, y(x) = 0$$

tiene como solución:

$y(x) = L_{\kappa\nu}(x) = (d^\nu/dx^\nu)\, L_\kappa(x)$, con $\nu \le \kappa$ Las **funciones asociadas de Laguerre**

de manera que

$$\begin{cases} \nu + 1 = 2\,l + 2 \\ \kappa - \nu = \beta - l + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu = 2\,l + 1 \\ \kappa = \beta + l \end{cases}$$

$\therefore\ \beta = n$ natural y $n^2 = -\,\mu\, k^2/(2\,\hbar^2\varepsilon_n)$ $\therefore\ \varepsilon_n = -(\mu\, k^2/2\,\hbar^2)1/n^2$

y como $2l + 1 \le n + l$ resulta $l \le n - 1$ y queda $l = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Además como $\alpha^2 = 4\mu^2 k^2/n^2\hbar^2$, se tiene $x = (2\mu\, k/n\,\hbar^2)\, r$, queda

$$R_{nl}(r) = (2\mu\, k/n\,\hbar^2)^l\, r^l\, L_{n+l,2l+1}(2\mu\, k/n\,\hbar^2\, r)\, exp(-\mu\, k/n\,\hbar^2\, r)$$

y finalmente

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\phi) = R_{nl}(r)\, P_{lm}(cos\,\theta)\, exp(im\phi),$$

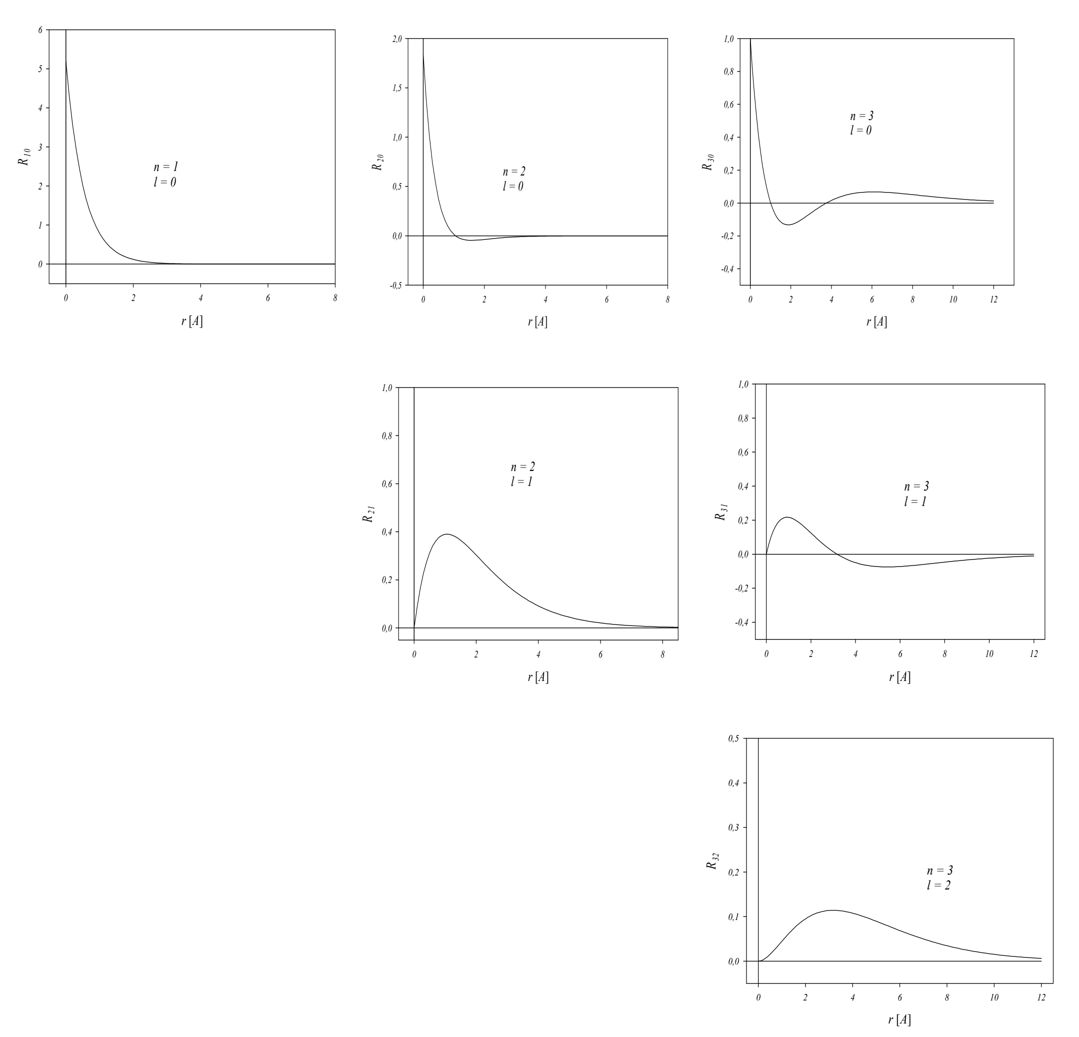


Figura 12.1 *Parte radial, R_{nl}, de la función de onda del atomo de hidrogeno, para n = 1, 2, 3.*

12.5.2 La molécula diatómica

Consideramos que las dos partículas son dos átomos, que constituyen una molécula diatómica, con un potencial de interacción de Morse, es decir:

$$U(r) = U_o\,[1 - exp(-a(r - r_o))]^2$$

que tiene un mínimo igual a $U(r_o) = 0$, además $U(r) \geq 0$.

Cerca de $r = r_o$, se cumple:

$$U(r) = U(r_o) + ½\, d^2U/dr^2\,(r_o)\,(r - r_o)^2 = ½\,\mu\,\omega^2\,(r - r_o)^2$$

Reemplazando en la parte radial de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, para dos partículas, donde μ es la masa reducida de los átomos, queda:

$$1/r^2 d/d\,r(\,r^2 dR/dr\ +\{\,2\mu/\hbar^2\,[\,\varepsilon - l(l+1)\,\hbar^2/2\mu\, r^2\,] - (\mu\,\omega/\hbar)^2\,(r - r_o)^2\,]\,R(r) = 0$$

Asumiendo que $\mu\, r^2 \cong \mu\, r_o^2 = I$ es el momento de inercia de la molécula, la energía rotacional del sistema de dos átomos está dada por $\varepsilon_r = \langle L^2\rangle/2I = l(l+1)\hbar^{\,2}/2I = l(l+1)\ \hbar^2/2\mu\ r^2$, entonces definiendo $\varepsilon_v = \varepsilon - \varepsilon_r$, queda:

$$1/r^2 d/d\,r(\,r^2 dR/dr\ +\{\,2\mu/\hbar^2\,\varepsilon_v - (\mu\,\omega/\hbar)^2\,(r - r_o)^2\,]\,R(r) = 0$$

Llamando $u(r) = r\,R(r)$, se reduce a $d^2u/d\,r^2 + \{\,2\mu/\hbar^2\,\varepsilon_v - (\mu\,\omega/\hbar)^2\,(r - r_o)^2\,]\,u(r) = 0$

Ahora introducimos los siguientes cambios: $s = r - r_o$, $u(r) = w(s)$, $\alpha = \mu\, \omega/\hbar$, $\beta = 2\mu/\hbar^2\, \varepsilon_v$, la ecuación ahora es:

$$d^2w/ds^2 + \{ \beta - \alpha^2 s^2]\, w(s) = 0$$

donde $w(s) = u(r)$, y con el cambio $x = \sqrt{\alpha}\, s$, llamando $v(x) = w(s)$, como $d^2w/ds^2 = \alpha\, d^2v/dx^2$, tenemos:

$$d^2v/dx^2 + \{ \beta/\alpha - x^2]\, v(x) = 0$$

Las solución asintótica, $|x| >> 1$, es $v(x) = c_1 \exp(-x^2/2) + c_2 \exp(+x^2/2)$, v debe ser finito para $|x| \to +\infty$ (molécula no disociada), es decir $c_2 = 0$.

Si ahora escribimos la expresión más general para todo x:

$v(x) = y(x) \exp(-x^2/2)$ tendremos:

$v'(x) = [-x\, y(x) + y'(x)] \exp(-x^2/2)$

$v''(x) = [(x^2 - 1)\, y(x) - 2\, x\, y'(x) + y''(x)] \exp(-x^2/2)$

Queda finalmente la EDO para $y(x)$:

$$d^2y/dx^2 - 2x\, dy/dx + (\beta/\alpha - 1)\, y(x) = 0$$

cuyas soluciones ya obtuvimos y eran:

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\, x^{2k}, \quad y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}\, x^{2k+1} \quad \text{con} \quad c_{k+1} = (2k+1 - \beta/\alpha)/(k+1)(k+2)\, c_k$$

Lamentablemente estas series divergen más rápido que $\exp(-x^2/2)$ cuando $|x| \to +\infty$, excepto que $\beta/\alpha - 1 = 2n$, donde $n = 0, 1, 2, ...$ que se reducen a polinomios (los polinomios de Hermite $H_n(x)$).

Por lo tanto como $\beta/\alpha = 2\varepsilon_v/\hbar\,\omega$, resulta que si:

$\varepsilon_v = (n + ½)\, \hbar\, \omega$, para $n = 0, 1, 2, ...$, y

$R_n(r) = r^{-1} H_n(\sqrt{(\mu\, \omega/\hbar)}(r - r_o)) \exp(-(\mu\, \omega/2\, \hbar)\, (r - r_o)^2)$ para $n = 0, 1, 2, ...$

De manera que la energía total de la molécula, se puede escribir como:

$$\varepsilon_{nl} = \varepsilon_v + \varepsilon_r = (n + ½)\, \hbar\, \omega + l(l+1)\, \hbar^2/2I$$

12.5.3 Ejemplos:

molécula	r_o [nm]	U_o [eV]	$\hbar\,\omega$ [eV]	$\hbar^2/2I$ [eV]
H_2	7.4	4.48	0.543	8.0×10^{-3}
N_2	10.9	7.37	0.292	2.5×10^{-4}
O_2	12.1	5.08	0.194	1.8×10^{-4}
CO	11.3	11.11	0.268	2.4×10^{-4}
Cl_2	19.9	2.47	0.070	3.1×10^{-5}

Tabla 12.2 *Energías de vibración y rotación de algunas moléculas simples.*

Referencias

Alonso, I.P. (1995). *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*. Wilmington. E.U.A. Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

Courant, R. y Hilbert D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Volume II. New York. E.U.A. Interscience Publishers Inc.

Epstein, B. (1962). *Partial Differetinal Equations*. New York. E.U.A. McGraw-Hill Book Company.

Godunov, S.K. (1978). *Ecuaciones de la física matemática*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Merzbacher, E. (1961). *Partial Differetinal Equations*. New York. E.U.A. John Wiley & Sons.

Santaló, L.A. (1970). *Vectores y tensores*. CABA. Argentina. EUDEBA.

Tijonov, A.N. y Samarsky, A.A. (1980). *Ecuaciones de la Física Matemática*. Moscú. URSS. Editorial MIR.

Los autores

Vicente, José Luis

Argentino, nacido en La Plata (Pcia. Bs. As.) el 21/04/51. Licenciado en Matemática (1976), Licenciado en Física (1977), en UNLP; Doctor en Física UNLP (1987). Posdoc (1991-1992) en la Universidad de Puerto Rico (EEUU). Maitre de Conférences (2000,2001), Université Henri Poincaré (Francia), Invited Professor (2003), Department of Mathematics, University of Karlsruhe, (Alemania), Professeur Invité (2003,2007), Institut Elie Cartan (Francia). Profesor de Matemáticas Especiales desde 1995 (UNLP). Docente categoría I (CNEAU) desde 21/09/98. Consejero Académico (1992-1994), Departamental del Depto. de Matemática (1988, 2002), Secretario Académico (2005-2007) en la Fac. de Cs. Extas. UNLP. Investigador Principal de la CICPBA (2008). Más de 70 trabajos publicados y presentaciones a congresos. Dirección y co dirección de 7 tesis doctorales. Director y jurado de proyectos de investigación, tesis y revistas.

Rafti, Matías

Matías Rafti nació en la ciudad de La Plata en el año 1979 y recibió su título de Lic. en Ciencias Químicas de la Universidad Nacional de La Plata en el año 2003. Realizó su tesis doctoral entre los años 2003 y 2007 en el INIFTA - Dpto. de Qca. - Facultad de Ciencias Exactas (FCE-UNLP) bajo la dirección del Prof. J.L. Vicente en experimentos y simulaciones referidos a la formación de patrones espacio-temporales en sistemas alejados del equilibrio. A lo largo de su trayectoria ha recibido becas y subsidios diversos organismos de financiamiento nacional e internacional (UNLP, CONICET, ANPCyT, DAAD-Deutscher Akademischer Austauschdienst, Comisión Fullbright, DFG-DFG - Deutsche Forschungsgemeinschaft) es miembro de la Carrera de Investigador Científico (CIC-CONICET) en la categoría Adjunto y se desempeña como docente de Ciencias Químicas en la FCE-UNLP.

Albesa, Alberto Gustavo

Alberto Gustavo Albesa completó la Licenciatura en Química en la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) (Argentina), se doctoró en 2011 estudiando los fenómenos de adsorción sobre nano estructuras carbonosas bajo la dirección del Prof. J.L Vicente. Ha realizado estadías de investigación en Europa y EEUU. En 2013 ingresó a la carrera de Investigador de CONICET como miembro del Instituto de Investigaciones Fisicoquímicas Teóricas y Aplicadas, habiendo alcanzado la categoría de Investigador Adjunto. El foco de su investigación se encuentra en el desarrollo y la aplicación del modelado molecular de materiales nano estructurados mediante desarrollos teóricos y simulaciones computacionales. A la fecha lleva publicados más de 25 artículos científicos en revistas nacionales e internacionales. Desarrolló su carrera docente en la Fac. Cs. Extas (UNLP), donde actualmente se desempeña como jefe de trabajos prácticos.

Libros de Cátedra

Vicente , José Luis
Matemáticas especiales para fisicoquímicos / José Luis Vicente ; Matías Rafti ; Alberto Gustavo Albesa. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; La Plata : EDULP, 2018.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1696-9

1. Matemática. I. Rafti , Matías II. Albesa, Alberto Gustavo III. Título
CDD 510.711

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2018
ISBN 978-950-34-1696-9





